

Задачник С4

Здесь приведены задачи С4, которые предлагались на ЕГЭ по математике, а также на диагностических, контрольных и тренировочных работах МИОО начиная с сентября 2009 года.

1. (МИОО, 2014) На гипотенузу AB прямоугольного треугольника ABC опустили высоту CH . Из точки H на катеты опустили перпендикуляры HK и HE .

- Докажите, что точки A , B , K и E лежат на одной окружности.
- Найдите радиус этой окружности, если $AB = 12$, $CH = 5$.

7 81

2. (МИОО, 2014) Две окружности пересекаются в точках P и Q . Прямая, проходящая через точку P , второй раз пересекает первую окружность в точке A , а вторую — в точке D . Прямая, проходящая через точку Q параллельно AD , второй раз пересекает первую окружность в точке B , а вторую — в точке C .

- Докажите, что четырёхугольник $ABCD$ — параллелограмм.
- Найдите отношение $BP : PC$, если радиус первой окружности вдвое больше радиуса второй.

7

3. (МИОО, 2013) Медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Точки A_2 , B_2 и C_2 — середины отрезков MA , MB и MC соответственно.

- Докажите, что площадь шестиугольника $A_1B_2C_1A_2B_1C_2$ вдвое меньше площади треугольника ABC .
- Найдите сумму квадратов всех сторон этого шестиугольника, если известно, что $AB = 5$, $BC = 8$ и $AC = 10$.

7 89

4. (МИОО, 2013) Биссектриса угла ADC параллелограмма $ABCD$ пересекает прямую AB в точке E . В треугольник ADE вписана окружность, касающаяся стороны AE в точке K и стороны AD в точке T .

- Докажите, что прямые KT и DE параллельны.
- Найдите угол BAD , если известно, что $AD = 6$ и $KT = 3$.

09

5. (МИОО, 2013) В треугольник ABC вписана окружность радиуса R , касающаяся стороны AC в точке D , причём $AD = R$.

- Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.
- Вписанная окружность касается сторон AB и BC в точках E и F . Найдите площадь треугольника BEF , если известно, что $R = 5$ и $CD = 15$.

07

6. (ЕГЭ, 2013) Радиусы окружностей с центрами O_1 и O_2 равны соответственно 2 и 9. Найдите радиус третьей окружности, которая касается двух данных и прямой O_1O_2 , если $O_1O_2 = 21$.

08 или 8

7. (ЕГЭ, 2013) Угол C треугольника ABC равен 30° , D — отличная от A точка пересечения окружностей, построенных на сторонах AB и AC как на диаметрах. Известно, что $BD : DC = 1 : 6$. Найдите синус угла A .

$\frac{9\sqrt{2}}{13}$ или $\frac{9\sqrt{2}}{13}$

8. (ЕГЭ, 2013) В окружности проведены хорды PQ и CD , причем $PQ = PD = CD = 12$, $CQ = 4$. Найдите CP .

$4\sqrt{6}$ или $9\sqrt{4}$

9. (ЕГЭ, 2013) Окружности радиусов 1 и 4 с центрами O_1 и O_2 соответственно касаются внешним образом в точке C . AO_1 и BO_2 — параллельные радиусы этих окружностей, причём $\angle AO_1O_2 = 60^\circ$. Найдите AB .

7 или 5

10. (ЕГЭ, 2013) Окружности радиусов 3 и 5 с центрами O_1 и O_2 соответственно касаются в точке A . Прямая, проходящая через точку A , вторично пересекает меньшую окружность в точке B , а большую — в точке C . Найдите площадь треугольника BCO_2 , если $\angle ABO_1 = 15^\circ$.

$2/5$ или 01

11. (ЕГЭ, 2013) Окружность радиуса 6 вписана в угол, равный 60° . Вторая окружность также вписана в этот угол и пересекается с первой в точках M и N . Известно, что расстояние между центрами окружностей равно 4. Найдите MN .

$3\sqrt{13}$ или $7\sqrt{3}$

12. (ЕГЭ, 2013) Окружность радиуса $6\sqrt{2}$ вписана в прямой угол. Вторая окружность также вписана в этот угол и пересекается с первой в точках M и N . Известно, что расстояние между центрами окружностей равно 8. Найдите MN .

$4\sqrt{2}$ или $4\sqrt{14}$

13. (ФЦТ, 2013) Две стороны треугольника равны 8 и 10, косинус угла между ними равен $2/5$. В треугольник вписан ромб, имеющий с треугольником общий угол (вершина ромба, противоположная вершине этого угла, лежит на третьей стороне треугольника). Найдите сторону ромба.

$\frac{6}{17}$ или 5

14. (МИОО, 2013) Расстояния от точки M , расположенной внутри прямого угла, до сторон угла равны 4 и 3. Через точку M проведена прямая, отсекающая от угла треугольник, площадь которого равна 32. Найдите длину отрезка этой прямой, заключённого внутри угла.

$4\sqrt{17}$ или $\frac{3}{4\sqrt{97}}$

15. (МИОО, 2013) Окружность, вписанная в треугольник ABC , площадь которого равна 66, касается средней линии, параллельной стороне BC . Известно, что $BC = 11$. Найдите сторону AB .

13 или 20

16. (МИОО, 2012) Вневыписанной окружностью треугольника называется окружность, касающаяся одной стороны треугольника и продолжений двух других его сторон. Радиусы двух вневыписанных окружностей прямоугольного треугольника равны 7 и 17. Найдите расстояние между их центрами.

26 или $24\sqrt{2}$

17. (МИОО, 2012) Дан прямоугольник $KLMN$ со сторонами: $KN = 11$, $MN = 8$. Прямая, проходящая через вершину M , касается окружности с центром K радиуса 4 и пересекается с прямой KN в точке Q . Найдите QK .

3/28 или 3

18. (ЕГЭ, 2012) Боковые стороны KL и MN трапеции $KLMN$ равны 10 и 26 соответственно. Отрезок, соединяющий середины диагоналей, равен 12, средняя линия трапеции равна 24. Прямые KL и MN пересекаются в точке A . Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ALM .

2 или 6

19. (ЕГЭ, 2012) Дан равнобедренный треугольник с боковой стороной 4 и углом 120° . Внутри него расположены две равные касающиеся окружности, каждая из которых касается двух сторон треугольника. Найдите радиусы окружностей.

$\frac{2}{3}\sqrt{3}$ или $1 - \frac{2}{3}\sqrt{3}$

20. (ЕГЭ, 2012) В треугольнике ABC известны стороны: $AB = 5$, $BC = 6$, $AC = 7$. Окружность, проходящая через точки A и C , пересекает прямые BA и BC соответственно в точках K и L , отличных от вершин треугольника. Отрезок KL касается окружности, вписанной в треугольник ABC . Найдите длину отрезка KL .

7 или $14/9$

21. (ЕГЭ, 2012) Точка O — центр правильного шестиугольника $ABCDEF$ со стороной $14\sqrt{3}$. Найдите радиус окружности, касающейся окружностей, описанных около треугольников AOB , COD и EOF .

28 или 12

22. (ЕГЭ, 2012) Продолжение биссектрисы CD неравнобедренного треугольника ABC пересекает окружность, описанную около этого треугольника, в точке E . Окружность, описанная около треугольника ADE , пересекает прямую AC в точке F , отличной от A . Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC , если $AC = 8$, $AF = 3$, угол BAC равен 45° .

$\frac{2}{11}\sqrt{11}$

23. (ЕГЭ, 2012) Угол C треугольника ABC равен 30° , D — отличная от A точка пересечения окружностей, построенных на сторонах AB и AC как на диаметрах. Известно, что $DB : DC = 2 : 5$. Найдите синус угла A .

$$\frac{\sqrt{11}}{11} \text{ или } \frac{\sqrt{11}}{3}$$

24. (ЕГЭ, 2012) На прямой, содержащей медиану AD прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C , взята точка E , удаленная от вершины A на расстояние, равное 4. Найдите площадь треугольника BCE , если $BC = 6$, $AC = 4$.

$$21,6 \text{ или } 2,4$$

25. (МИОО, 2012) Площадь трапеции $ABCD$ равна 135. Диагонали пересекаются в точке O . Отрезки, соединяющие середину P основания AD с вершинами B и C , пересекаются с диагоналями трапеции в точках M и N . Найдите площадь треугольника MON , если одно из оснований трапеции вдвое больше другого.

$$12\frac{1}{2} \text{ или } 15\frac{1}{4}$$

26. (МИОО, 2012) Дан треугольник ABC со сторонами $AB = 15$, $AC = 9$ и $BC = 12$. На стороне BC взята точка D , а на отрезке AD — точка O , причём $CD = 4$ и $AO = 3OD$. Окружность с центром O проходит через точку C . Найдите расстояние от точки C до точки пересечения этой окружности с прямой AB .

$$7,2 \text{ или } 7,5$$

27. (Москва, репетиционный ЕГЭ, 2012) Расстояние между двумя параллельными прямыми равно 24. На одной из них взята точка C , а на другой взяты точки A и B так, что треугольник ABC — остроугольный равнобедренный, и его боковая сторона равна 25. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC .

$$125\frac{8}{48} \text{ или } 25\frac{8}{3}$$

28. (Санкт-Петербург, репетиционный ЕГЭ, 2012) Дан треугольник ABC . Точка E на прямой AC выбрана так, что треугольник ABE , площадь которого равна 14, — равнобедренный с основанием AE и высотой BD . Найдите площадь треугольника ABC , если известно, что $\angle ABE = \angle CBD = \alpha$ и $\operatorname{tg} \alpha = \frac{24}{7}$.

$$25 \text{ или } 39$$

29. (Федеральный центр тестирования, 2012) Радиусы окружностей S_1 и S_2 с центрами O_1 и O_2 равны 1 и 7 соответственно, расстояние между точками O_1 и O_2 равно 5. Хорда AB окружности S_2 касается окружности S_1 в точке M , причём точки O_1 и O_2 лежат по одну сторону от прямой AB . Найдите длину отрезка AB , если известно, что $AM : MB = 1 : 6$.

$$\frac{13}{6} \text{ или } \frac{17}{6}$$

30. (Юг, пробный ЕГЭ, 2012) Радиус окружности, вписанной в равнобедренный треугольник, равен 150 см, косинус угла при его основании равен $\frac{7}{8}$. Найдите радиус окружности, касающейся вписанной окружности этого треугольника и двух его сторон.

$$90 \text{ см или } 06 \text{ см}$$

31. (МИОО, 2011) Расстояние между параллельными прямыми равно 6. На одной из них лежит вершина C , на другой — основание AB равнобедренного треугольника ABC . Известно, что $AB = 16$. Найдите расстояние между центрами окружностей, одна из которых вписана в треугольник ABC , а вторая касается данных параллельных прямых и боковой стороны треугольника ABC .

$$\frac{8}{01\sqrt{}} \text{ или } \frac{8}{082\sqrt{}}$$

32. (МИОО, 2011) Точка M лежит на отрезке AB . На окружности с диаметром AB взята точка C , удалённая от точек A , M и B на расстояния 20, 14 и 15 соответственно. Найдите площадь треугольника BMC .

$$81\sqrt{12}\mp 48$$

33. (МИОО, 2011) Дан прямоугольный треугольник ABC с катетами $AC = 15$ и $BC = 8$. С центром в вершине B проведена окружность S радиуса 17. Найдите радиус окружности, вписанной в угол BAC и касающейся окружности S .

$$\frac{8}{58} \text{ или } \frac{8}{18}$$

34. (МИОО, 2011) Прямая, перпендикулярная гипотенузе прямоугольного треугольника, отсекает от него четырёхугольник, в который можно вписать окружность. Найдите радиус окружности, если отрезок этой прямой, заключённый внутри треугольника, равен 40, а отношение катетов треугольника равно $15/8$.

$$25 \text{ или } 32$$

35. (ЕГЭ, 2011) Окружность, вписанная в треугольник ABC , площадь которого равна 36, касается средней линии, параллельной стороне BC . Известно, что $BC = 9$. Найдите сторону AB .

$$10 \text{ или } 17$$

36. (ЕГЭ, 2011) Прямая, перпендикулярная боковой стороне равнобедренного треугольника, отсекает от него четырёхугольник, в который можно вписать окружность. Найдите радиус окружности, если отрезок прямой, заключённый внутри треугольника, равен 6, а отношение боковой стороны треугольника к его основанию равно $5/6$.

$$9/2 \text{ или } 21/4$$

37. (ЕГЭ, 2011) Дана окружность радиуса 4 с центром в точке O , расположенной на биссектрисе угла, равного 60° . Найдите радиус окружности, вписанной в данный угол и касающейся данной окружности внешним образом, если известно, что расстояние от точки O до вершины угла равно 10.

$$2 \text{ или } 14$$

38. (ЕГЭ, 2011) Окружность радиуса 6 вписана в равнобедренную трапецию, большее основание которой равно 18. Прямая, проходящая через центр окружности и вершину трапеции, отсекает от трапеции треугольник. Найдите отношение площади этого треугольника к площади трапеции.

$$1/2 \text{ или } 162/299$$

39. (ЕГЭ, 2011) Точки A , B и C лежат на сторонах соответственно KL , LM и KM треугольника KLM , причём $KABC$ — параллелограмм, площадь которого составляет $3/8$ площади треугольника KLM . Найдите диагональ AC параллелограмма, если известно, что $KL = 8$, $KM = 12$ и $\cos \angle LKM = 7/12$.

9/8 или 8

40. (ЕГЭ, 2011) Через вершину B правильного шестиугольника $ABCDEF$ проведена прямая, пересекающая диагональ CF в точке K . Известно, что эта прямая разбивает шестиугольник на части, площади которых относятся как $1 : 2$. Найдите отношение $CK : KF$.

5/8 или 2

41. (ЕГЭ, 2011) Расстояния от точки M , расположенной внутри угла, равного 60° , до сторон угла равны 1 и 2. Найдите радиус окружности, вписанной в этот угол и проходящей через точку M .

$\frac{5}{2\sqrt{3}} \mp 2$

42. (Москва, репетиционный ЕГЭ, 2011) Найти радиус окружности, вписанной в угол MKN , равный $2 \arcsin 0,6$, и касающейся окружности радиуса 4, также вписанной в угол MKN .

91 или 1

43. (Санкт-Петербург, репетиционный ЕГЭ, 2011) Четырёхугольник $ABCD$ описан около окружности и вписан в окружность. Прямые AB и DC пересекаются в точке M . Найдите площадь четырёхугольника, если известно, что $\angle AMD = \alpha$ и радиусы окружностей, вписанных в треугольники BMC и AMD , равны соответственно r и R .

$\frac{r}{R} \sin \frac{\alpha}{2} \frac{R}{(2R - r)\alpha}$ или $\frac{r}{R} \sin \frac{\alpha}{2} \frac{R}{(2R - r)\alpha}$

44. (МИОО, 2011) Расстояние между параллельными прямыми равно 12. На одной из них лежит вершина C , на другой — основание AB равнобедренного треугольника ABC . Известно, что $AB = 10$. Найдите расстояние между центрами окружностей, одна из которых вписана в треугольник ABC , а вторая касается данных параллельных прямых и боковой стороны треугольника ABC .

$\frac{5}{11\sqrt{4}}$ или $\frac{5}{16\sqrt{4}}$

45. (МИОО, 2011) Прямая, проведённая через середину N стороны AB квадрата $ABCD$, пересекает прямые CD и AD в точках M и T соответственно и образует с прямой AB угол, тангенс которого равен 4. Найдите площадь треугольника $БМТ$, если сторона квадрата $ABCD$ равна 8.

87 или 61

46. (МИОО, 2011) Площадь трапеции $ABCD$ равна 90, а одно из оснований трапеции вдвое больше другого. Диагонали пересекаются в точке O ; отрезки, соединяющие середину P основания AD с вершинами B и C , пересекаются с диагоналями трапеции в точках M и N соответственно. Найдите площадь четырёхугольника $ОМРN$.

7 или 01

47. (МИОО, 2010) Дан параллелограмм $ABCD$, $AB = 2$, $BC = 5$, $\angle A = 60^\circ$. Окружность с центром в точке O касается биссектрисы угла D и двух сторон параллелограмма, исходящих из вершины одного его острого угла. Найдите площадь четырёхугольника $ABOD$.

$$\frac{9}{8\sqrt{3}} \text{ или } \frac{3\sqrt{3}}{8}$$

48. (МИОО, 2010) Расстояние между параллельными прямыми равно 12. На одной из них лежит точка C , а на другой — точки A и B , причём треугольник ABC — остроугольный равнобедренный и его боковая сторона равна 13. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ABC .

$$\frac{3}{10} \text{ или } \frac{3}{26\sqrt{13}}$$

49. (МИОО, 2010) Окружность S радиуса 12 вписана в прямоугольную трапецию с основаниями 28 и 21. Найдите радиус окружности, которая касается основания, большей боковой стороны и окружности S .

$$\frac{3}{4} \text{ или } 3$$

50. (МИОО, 2010) Две окружности, касающиеся прямой в точках A и B , пересекаются в точках C и D , причём $AB = 8$, $CD = 15$. Найдите медиану CE треугольника ABC .

$$1 \text{ или } 91$$

51. (МИОО, 2010) В треугольнике KLM проведены биссектриса KP и высота KH . Известно, что $KM/KL = 1/2$, $PH/MH = 3/2$, а площадь треугольника KHP равна 30. Найдите площадь треугольника KLM .

$$151 \text{ или } 08$$

52. (ЕГЭ, 2010) Дан параллелограмм $ABCD$. Точка M лежит на диагонали BD и делит её в отношении 1 : 2. Найдите площадь параллелограмма $ABCD$, если площадь четырёхугольника $ABCM$ равна 60.

$$06 \text{ или } 081$$

53. (ЕГЭ, 2010) Диагонали трапеции равны 5 и $\sqrt{20}$, а высота равна 4. Найдите площадь трапеции.

$$7 \text{ или } 01$$

54. (ЕГЭ, 2010) В окружности, радиус которой равен 5, проведена хорда $AB = 8$. Точка C лежит на хорде AB так, что $AC : BC = 1 : 2$. Найдите радиус окружности, касающейся данной окружности и касающейся хорды AB в точке C .

$$\frac{6}{9} \text{ или } \frac{6}{8}$$

55. (ЕГЭ, 2010) В параллелограмме $ABCD$ биссектрисы углов при стороне AD делят сторону BC точками M и N так, что $BM : MN = 1 : 5$. Найдите BC , если $AB = 3$.

$$12 \text{ или } \frac{7}{2}$$

56. (ЕГЭ, 2010) В треугольнике ABC $AB = 15$, $BC = 8$, $CA = 9$. Точка D лежит на прямой BC так, что $BD : DC = 3 : 8$. Окружности, вписанные в каждый из треугольников ADC и ADB , касаются стороны AD в точках E и F . Найдите длину отрезка EF .

11/33 или 7

57. (ЕГЭ, 2010) В окружность радиуса $3\sqrt{5}/2$ вписана трапеция с основаниями 3 и 4. Найдите расстояние от центра окружности до точки пересечения диагоналей трапеции.

$\frac{24+3\sqrt{29}}{14}$ или $\frac{14}{24-3\sqrt{29}}$

58. (МИОО, 2010) Расстояние между центрами окружностей радиусов 2 и 8 равно 15. Этим окружностям и их общей внутренней касательной касается третья окружность. Найдите её радиус.

125/8 или 125/8

59. (МИОО, 2010) Дан прямоугольный треугольник ABC с катетами $AC = 12$ и $BC = 5$. С центром в вершине B проведена окружность S радиуса 8. Найдите радиус окружности, вписанной в угол BAC и внешним образом касающейся окружности S .

21/25 или 5

60. (МИОО, 2010) На стороне прямого угла с вершиной A взята точка O , причём $AO = 7$. С центром в точке O проведена окружность S радиуса 1. Найдите радиус окружности, вписанной в данный угол и касающейся окружности S .

4 или 12

61. (МИОО, 2010) Расстояние между центрами окружностей радиусов 1 и 9 равно 17. Обе окружности лежат по одну сторону от общей касательной. Третья окружность касается обеих окружностей и их общей касательной. Найдите радиус третьей окружности.

225/64 или 225/16

62. (МИОО, 2010) Радиус окружности, описанной около треугольника ABC , равен 13; высота, проведённая к стороне BC , равна 5; $\cos \angle BAC = 5/13$. Найдите длину той хорды AM описанной окружности, которая делится пополам стороной BC .

$\sqrt{26(13 \pm \sqrt{69})} \pm \sqrt{69}$

63. (МИОО, 2010) Центр O окружности радиуса 4 принадлежит биссектрисе угла величиной 60° . Найдите радиус окружности, вписанной в данный угол и касающейся данной окружности, если известно, что расстояние от точки O до вершины угла равно 10.

2; 14; 14/3; 6

64. (МИОО, 2010) Расстояния от общей хорды двух пересекающихся окружностей до их центров относятся как 2 : 5. Общая хорда имеет длину $2\sqrt{3}$, а радиус одной из окружностей в два раза больше радиуса другой окружности. Найдите расстояние между центрами окружностей.

3 или 7

65. (МИОО, 2010) Две окружности пересекаются в точках A и B . Через точку A проведены диаметры AC и AD этих окружностей. Найдите расстояние между центрами окружностей, если $BC = 7$, $BD = 3$.

2 или 5

66. (МИОО, 2010) В прямоугольнике $ABCD$ $AB = 2$, $BC = \sqrt{3}$. Точка E на прямой AB выбрана так, что $\angle AED = \angle DEC$. Найдите AE .

5 или 1

67. (МИОО, 2010) Трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC вписана в окружность с центром O . Найдите высоту трапеции, если её средняя линия равна 3 и $\sin \angle AOB = 3/5$.

6 или 1

68. (МИОО, 2010) Найдите длину отрезка общей касательной к двум окружностям, заключённого между точками касания, если радиусы окружностей равны 23 и 7, а расстояние между центрами окружностей равно 34.

30 или 16

69. (Москва, репетиционный ЕГЭ, 2010) Точка H — основание высоты треугольника со сторонами 10, 12, 14, опущенной на сторону, равную 12. Через точку H проведена прямая, отсекающая от треугольника подобный ему треугольник и пересекающая сторону, равную 10, в точке M . Найдите HM .

5/14 или 5/1

70. (МИОО, 2009) Точки D и E — основания высот непрямоугольного треугольника ABC , проведённых из вершин A и C соответственно. Известно, что $DE/AC = k$, $BC = a$ и $AB = b$. Найдите сторону AC .

$\sqrt{a^2 + b^2} \cdot k$

71. (МИОО, 2009) В параллелограмме $ABCD$ известны стороны $AB = a$, $BC = b$ и $\angle BAD = \alpha$. Найдите расстояние между центрами окружностей, описанных около треугольников BDC и DAB .

$\sqrt{a^2 + b^2} \cdot \cos \alpha$

72. (МИОО, 2009) Через середину стороны AB квадрата $ABCD$ проведена прямая, пересекающая прямые CD и AD в точках M и T соответственно и образующая с прямой AB угол α , $\operatorname{tg} \alpha = 3$. Найдите площадь треугольника $БМТ$, если сторона квадрата $ABCD$ равна 4.

2 или 10

73. (МИОО, 2009) Дана трапеция $ABCD$, основания которой $BC = 44$, $AD = 100$; $AB = CD = 35$. Окружность, касающаяся прямых AD и AC , касается стороны CD в точке K . Найдите длину отрезка $СК$.

5 или 30

74. (МИОО, 2009) В треугольнике ABC на стороне BC выбрана точка D так, что $BD : DC = 1 : 2$. Медиана CE пересекает отрезок AD в точке F . Какую часть площади треугольника ABC составляет площадь треугольника AEF ?

01/1

75. (МИОО, 2009) В треугольнике ABC проведены биссектрисы AD и CE . Найдите длину отрезка DE , если $AC = 6$, $AE = 2$, $CD = 3$.

5/6√7