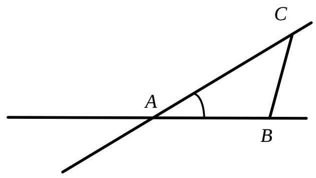
Материал разработан преподавателем математики
подготовительных курсов
Учебного центра «Азъ»
Трубецким Алексеем Петровичем

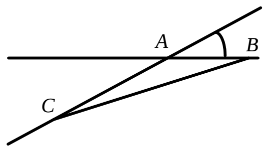
Подготовка к С4

Треугольник, основные теоремы.

1. Две прямые пересекаются под углом 30^0. От точки пересечения A на одной из прямых отложен отрезок $AB=1$, на другой прямой отложен отрезок $AC=\sqrt{3}$. Найти длину радиуса окружности, описанной около треугольника ABC. **Ответ:** 1; $\sqrt{7}$.

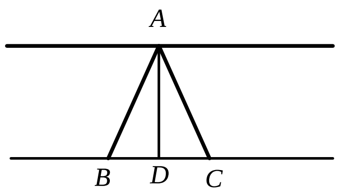


I. Вариант. По теореме косинусов найдем $BC=\sqrt{AC^2+AB^2-2AC\cdot AB\cdot\cos\angle CAB}=1$. Радиус окружности найдем из теоремы синусов окружности $R=\dfrac{BC}{2\sin 30^0}=1$.

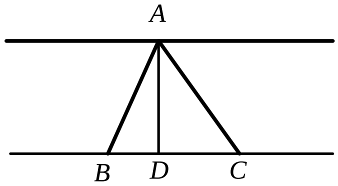


II. Вариант. Следует из чертежа.

2. На двух параллельных прямых, расстояние между которыми равно 12, расположены вершины треугольника, боковые стороны которого равны 13. Найдите третью сторону треугольника. **Ответ:** 10; $4\sqrt{13}$.

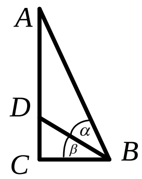


I. Вариант. Дано: $AB=AC=13$, $AD=12$ По теореме Пифагора найдем $DC=\sqrt{AC^2-AD^2}=5$. Сторона треугольника $BC=10$.



II. Вариант. Пусть теперь треугольник расположен так, что $AB=BC=13$.

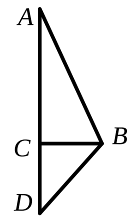
3. В прямоугольном треугольнике ABC длины катет $BC=4$ равна $AC=12$. На прямой AC взята точка D так, что $AD:DC=3$. Найдите $\sin\angle ABD$. ***Ответ***: $\dfrac{9}{5\sqrt{10}}$; $\dfrac{9}{\sqrt{130}}$.



I. Вариант. По теореме Пифагора найдем $AB=4\sqrt{10}$. Найдем $DC=3$, затем $DB=5$. Т.к. $\alpha=\angle B-\beta$, $\sin\alpha=\sin\angle B\cdot\cos\beta-\cos\angle B\cdot\sin\beta$. Получаем $\sin\alpha=\dfrac{9}{5\sqrt{10}}$.

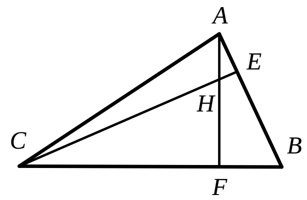
Заметим, что можно было из треугольника ABD по теореме косинусов найти $\cos\alpha$, затем $\sin\alpha$.

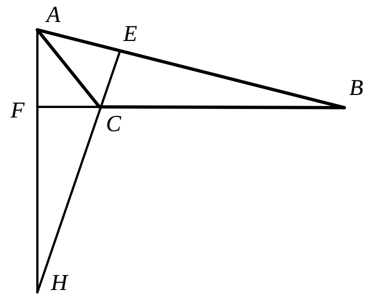
II. Вариант. Рассмотрите другой вариант положения точки D.



4. Высоты треугольника ABC пересекаются в точке H. Известно, что $CH = AB$. Найдите угол $\angle ACB$. **Ответ**: 45^0; 135^0.

I. Вариант. Треугольники ABF и CHF равны, т.к. оба они прямоугольные, имеют по условию равные гипотенузы и угол $\angle FAB = \angle HCF$ как два острых угла со взаимно перпендикулярными сторонами. Следовательно, $AF = CF$, и треугольник AFC прямоугольный и равнобедренный, откуда $\angle ACB = 45^0$.

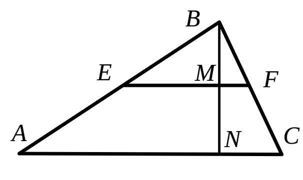




Рассмотрите вариант тупого угла C. Докажите равенство треугольников FAB и HCF, затем докажите, что $FA = CF$.

5. В треугольнике ABC проведена прямая, параллельная AC и пересекающая стороны AB и BC в точках E и F соответственно. Прямая EF делит треугольник ABC на две фигуры, площади которых относятся как $1:3$. Найдите отношение длин отрезков AC и EF. **Ответ**: 2; $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

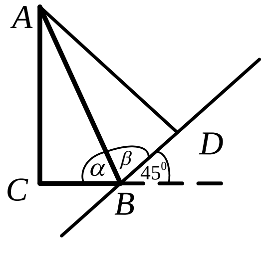
I. Вариант. Пусть $S_{EBF} : S_{AEFC} = 1:3$. Тогда $S_{EBF} : S_{ABC} = 1:4$. Треугольники ABC и EBF подобны, причем коэффициент подобия $k^2 = 4$ или $k = 2$. Следовательно, $AC : EF = 2$.



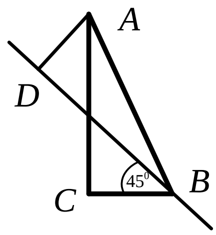
II. Вариант. Рассмотрите случай $S_{EBF} : S_{AEFC} = 3:1$.

6. Площадь прямоугольного треугольника ABC $\left(\angle C = 90^0\right)$ равна 8, длина катета BC равна 2. Прямая проходит через точку B и образует угол 45^0 с прямой BC. Найдите расстояние от точки A до указанной прямой. **Ответ**: $3\sqrt{2}$; $5\sqrt{2}$.

I. Вариант. Из формулы площади следует, что $AC = 8$, по теореме Пифагора найдем $AB = \sqrt{68}$. Найдем $\sin\beta = \sin\left(135^0 - \alpha\right) = \sin 135^0 \cos\alpha - \cos 135^0 \sin\alpha$, получаем $\sin\beta = \dfrac{5\sqrt{2}}{\sqrt{68}}$. Затем $AD = AB \cdot \sin\beta = 5\sqrt{2}$.

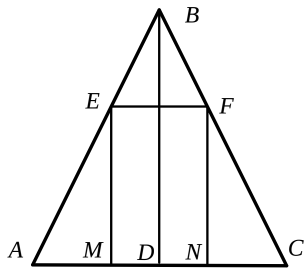


II. Вариант. Рассмотрите другой вариант положения точки прямой.

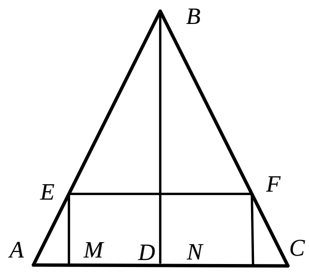


7. В треугольнике ABC $AB = BC = 13$, а $AC = 10$. В треугольник вписан прямоугольник так, что две его вершины лежат на стороне AC, а две другие на сторонах AB и BC. Известно, что одна сторона прямоугольника вдвое больше другой. Найдите диагональ прямоугольника.

Ответ: $3,75\sqrt{5}$; $\frac{60\sqrt{5}}{17}$.



I. Вариант. По теореме Пифагора найдем $BD = 12$. Из треугольника BDC найдем $\operatorname{tg}\angle C = \frac{12}{5} = 2,4$. Пусть $MN = x$, тогда $FN = 2x$, а $NC = 5 - \frac{x}{2}$. Из треугольника FCN следует, что $FN = CN \cdot \operatorname{tg}\angle C$ или $2x = \left(5 - \frac{x}{2}\right) \cdot 2,4$. Получаем $x = 3,75$, Диагональ равна $\sqrt{4x^2 + x^2} = x\sqrt{5} = 3,75\sqrt{5}$.



II. Вариант. Рассмотрите другой вариант расположения прямоугольника.

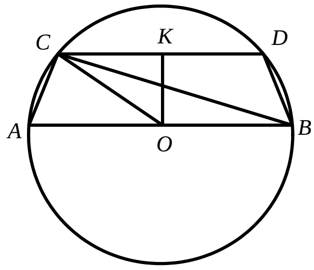
Материал разработан преподавателем математики
подготовительных курсов
Учебного центра «Азъ»
Трубецким Алексеем Петровичем

Подготовка к С4

Окружность, основные теоремы.

1. Длина окружности равна 20π . Диаметр AB и хорда CD лежат на параллельных прямых. Расстояние между указанными прямыми равно $\sqrt{19}$. Найдите длину хорды BC . **Ответ**: $2\sqrt{5}$; $2\sqrt{95}$.

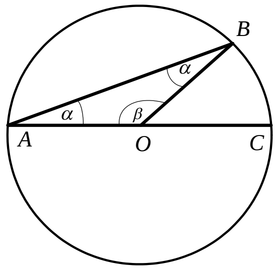
I. Вариант. Длина окружности $20\pi = 2\pi R$, откуда $R = 10$. Из треугольника COK следует, что $CK = \sqrt{CO^2 - OK^2} = 9$. Из треугольника COK находим $\cos\angle OCK = 0,9$. Далее $\cos\angle COA = \cos\angle OCK = 0,9$. По теореме косинусов находим $CA = 2\sqrt{5}$. Из прямоугольного треугольника ABC найдем $BC = 2\sqrt{95}$.

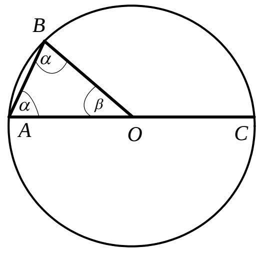


II. Вариант. Поменяйте местами точки C и D .

2. Площадь круга, ограниченного некоторой окружностью, равна 12π , AC – диаметр этой окружности, точка O – ее центр. Точка B лежит на окружности, причем площадь треугольника AOB равна 3. Найдите величину угла $\angle CAB$. **Ответ**: 15^0 ; 75^0 .

I. Вариант. Пусть $AO = R$. Тогда $\pi R^2 = 12\pi$ и $R = \sqrt{12}$. Треугольник AOB равнобедренный, его площадь $S = \dfrac{1}{2}R^2 \sin\beta$, откуда $\sin\beta = \dfrac{1}{2}$. При данном расположении точки B угол β тупой, следовательно, $\beta = 150^0$, откуда следует $\alpha = 15^0$.

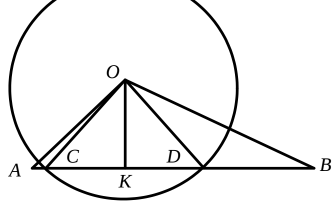




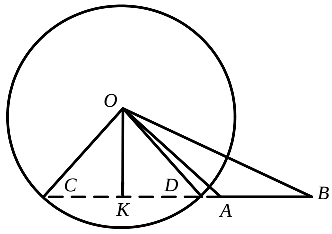
II. Вариант. Рассмотрите вариант острого угла β .

3. Площадь круга с центром в точке O равна 144π . Точки A и B расположены на расстоянии $12,5$ и 26 соответственно от точки O . Длина хорды, лежащей на прямой AB равна $4\sqrt{11}$. Найдите площадь треугольника AOB . **Ответ**: $82,5$; $157,5$.

I. Вариант. Длина $R = 12$. Из треугольника COK следует, что $OK = 10$. Из треугольника AOK находим $AK = 7,5$, а из треугольника ABK находим $BK = 24$. Далее $S_{AOB} = \dfrac{1}{2}AB \cdot OK = 157,5$.

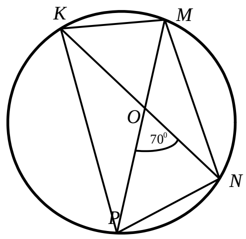


II. Вариант. Рассмотрите случай, когда точки A и B лежат по одну сторону от хорды CD.

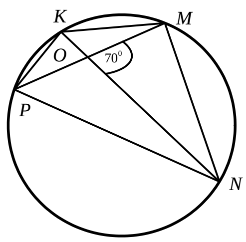


4. На окружности с радиусом $R=\sqrt{3}$ последовательно поставлены точки K, M, N и P так, что дуги $KM=40^0$ и $MN=100^0$, а хорды KN и MP пересекаются под углом 70^0. Найдите длину наибольшей стороны четырехугольника $KMNP$. **Ответ**: $2\sqrt{3}$; 3.

I. Вариант. Сначала надо доказать, что наибольшей стороной является KP, для этого найдем величину дуги KP. Вписанный угол $\angle KNM=20^0$, угол $\angle NOM=110^0$, следовательно, угол $\angle PNM=50^0$, а дуга $PN=100^0$. Дуга $KP=360^0-100^0-100^0-40^0=120^0$ является наибольшей, следовательно хорда KP является также наибольшей. Треугольник KNP вписан в окружность и по теореме синусов $\dfrac{KP}{\sin\angle KNP}=2R$. Получаем $KP=3$.

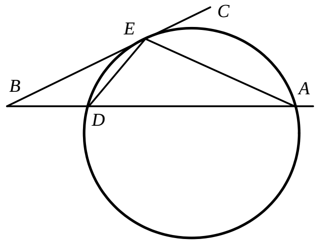


II. Вариант. Рассмотрите другой вариант расположения хорды MP.

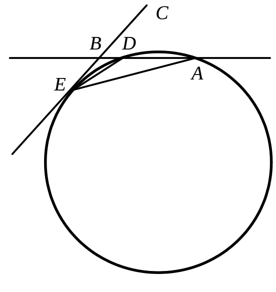


5. На стороне AB угла $\angle ABC=30^0$ взята точка D такая, что $AD=2$ и $BD=1$. Найдите радиус окружности, проходящей через точки A и D, и касающейся прямой BC. **Ответ**: 1; 7

I. Вариант. По теореме о касательной и секущей $BE^2=BA\cdot BD$, откуда $BE=\sqrt{3}$. По теореме косинусов найдем отрезки $AE=\sqrt{3}$ и $DE=1$. Треугольник ADE прямоугольный, следовательно, AD это диаметр и $R=1$.



II. Вариант. Рассмотрите другой вариант расположения окружности относительно угла $\angle ABC$.

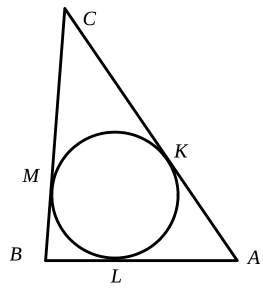


Материал разработан преподавателем математики
подготовительных курсов
Учебного центра «Азъ»
Трубецким Алексеем Петровичем

Подготовка к С4

Вписанные и описанные окружности

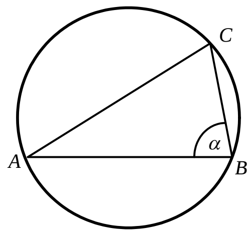
1. В треугольник ABC вписана окружность. Точка касания окружности стороны AC делит ее на отрезки с длинами 6 и 4. Периметр треугольника равен 24. Найдите $\sin\angle BAC$. **Ответ**: $0,6$; $0,8$.



I. Вариант. Пусть $CK = CM = 6$, $AK = AL = 4$, а $BL = BM = x$. Тогда $2\cdot 4 + 2\cdot 6 + 2x = 24$ и $x = 2$. Длины сторон треугольника таковы, что он является прямоугольным с гипотенузой AC. Получаем $\sin\angle BAC = \dfrac{BC}{AC} = 0,8$.

II. Вариант. Пусть $CK = CM = 4$, $AK = AL = 6$.

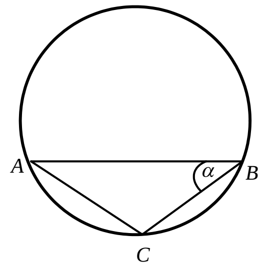
2. Треугольник ABC вписан в окружность радиуса 12. Известно, что $AB = 6$ и $BC = 4$. Найдите AC. **Ответ**: $\sqrt{35} \pm \sqrt{15}$.



I. Вариант. Из теоремы синусов следует, что Пусть $\dfrac{BC}{\sin\angle A} = 2R$, откуда $\sin\angle A = \dfrac{1}{6}$. Аналогично найдем $\sin\angle C = \dfrac{1}{4}$. Очевидно, что $\angle A$ острый, $BL = BM = x$. Тогда $\cos\angle A = \dfrac{\sqrt{35}}{6}$. Угол $\angle C$ может быть и острым, и тупым.

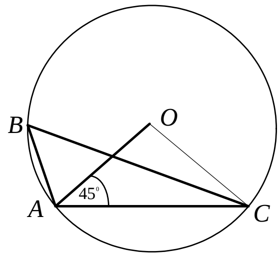
Рассмотрим вариант острого угла, тогда $\cos\angle C = \dfrac{\sqrt{15}}{4}$. Найдем $\sin\alpha = \sin\angle A\cos\angle C + \cos\angle A\sin\angle C$, т.е. $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{35}+\sqrt{15}}{24}$. По теореме синусов найдем $AC = \sqrt{35} + \sqrt{15}$.

II. Вариант. Пусть $\angle C$ тупой, тогда $\cos \angle C = -\frac{\sqrt{15}}{4}$.

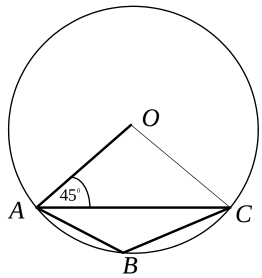


3. Угол между радиусом AO окружности, описанной около треугольника ABC и стороной AC равен 45^0. Найдите угол A треугольника ABC, если угол C равен 25^0. **Ответ**: 110^0; 20^0.

I. Вариант. Проведем радиус OC. Треугольник AOC равнобедренный, следовательно, $\angle O = 90^0$, а $\angle B = 45^0$. Получаем $\angle A = 180^0 - 25^0 - 45^0 = 110^0$.

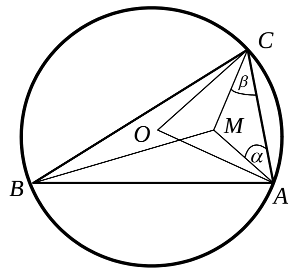


II. Вариант. Рассчитайте самостоятельно.

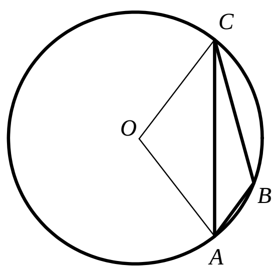


4. Около треугольника ABC описана окружность с центром O, угол $\angle AOC = 60^0$. В треугольник ABC вписана окружность с центром M. Найдите угол $\angle AMC$. **Ответ**: 165^0; 105^0.

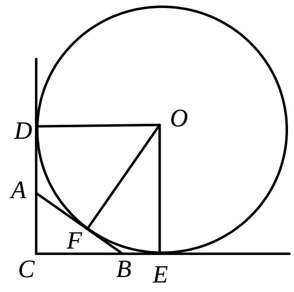
I. Вариант. Пусть $\angle B$ острый, тогда $\angle B = 30^0$. Точка M лежит на пересечении биссектрис, значит, $2\alpha + 2\beta = 180^0 - 30^0 = 150^0$, откуда $\alpha + \beta = 75^0$. Далее $\angle AMC = 180^0 - (\alpha + \beta) = 105^0$.



II. Вариант. Пусть $\angle B$ тупой, тогда $\angle B = \frac{360^0 - 60^0}{2} = 150^0$.



5. Прямая отсекает от сторон прямого угла отрезки с длинами 3 и 4. Найдите радиус окружности, касающейся этой прямой и сторон угла **Ответ**: 1; 6.

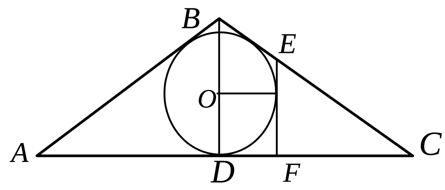


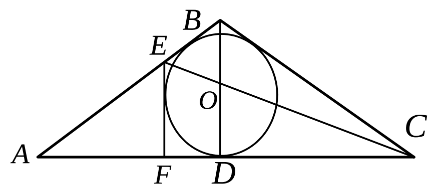
I. Вариант. Пусть $CB=4$ и $AC=3$, тогда $AB=5$. Обозначим $BE=BF=x$ и $AF=AD=y$. Тогда $x+y=5$ и $x+4=y+3$, т.к. $CDOE$ квадрат. Находим $x=2$, $R=x+4=6$.

II. Вариант. Совсем простой, т.к. получается окружность, вписанная в египетский треугольник.

6. В треугольнике ABC $AB=BC=10$, $AC=12$. В треугольник вписана окружность. Касательная к этой окружности, параллельная высоте BD, пересекает стороны треугольника в точках F и E. Найдите длину радиуса окружности, описанной около треугольника CFE. **Ответ:** $2{,}5$, $0{,}5\sqrt{97}$

I. Вариант. Найдем $BD=\sqrt{100-36}=8$. Площадь $S_{ABC}=48$, полупериметр $p=16$.. Тогда $r=\dfrac{S}{p}=3$ и $OD=DF=r=3$. Тогда $FC=DC-DF=3$. Треугольник DBC подобен треугольнику FEC с коэффициентом подобия $k=2$. Следовательно, треугольник FEC – египетский, и длина искомого радиуса $R=\dfrac{EC}{2}=2{,}5$.

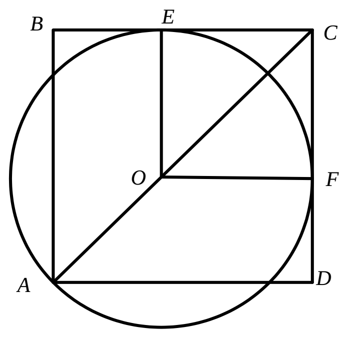




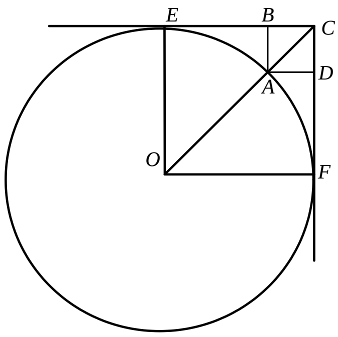
II. Вариант. Рассчитайте второй вариант согласно чертежу.

7. Площадь квадрата $ABCD$ равна 16. Окружность проходит через вершину A и касается прямых BC и CD. Найдите радиус этой окружности. **Ответ:** $4\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-1\right)$; $4\sqrt{2}\left(\sqrt{2}+1\right)$.

I. Вариант. Сторона квадрата равна 4. Диагональ $AC=4\sqrt{2}$. Пусть $OF=OE=R$. Тогда $AC=AO+OC=R+R\sqrt{2}$. Отсюда $R=\dfrac{4\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}=4\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-1\right)$.



II. Вариант. Рассчитайте второй вариант согласно чертежу.



Материал разработан преподавателем математики
подготовительных курсов
Учебного центра «Азъ»
Трубецким Алексеем Петровичем

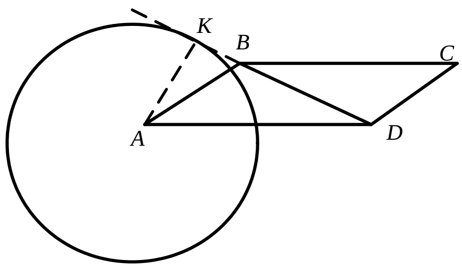
Подготовка к С4

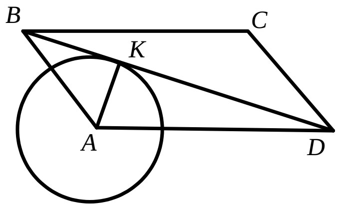
Четырехугольники.

1. В параллелограмме $ABCD$ $AB = 4$, $BC = 2$. Площадь параллелограмма равна $4\sqrt{3}$. Круг с центром в точке A касается прямой BD. Найдите площадь части круга, расположенной внутри параллелограмма. **Ответ**: $\frac{2\pi}{3}$; $\frac{4\pi}{7}$.

I. Вариант. Площадь параллелограмма $S = AD \cdot AC \cdot \sin\angle A$, откуда $\sin\angle A = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

По чертежу $\angle A$ острый, следовательно, $\angle A = 60^0$ и $\cos\angle A = 0,5$. В треугольнике ABD по теореме косинусов найдем $BD = 2\sqrt{3}$. Проведем в точку касания радиус AK, который является высотой треугольника ABD. Площадь $S_{ABD} = \frac{1}{2} \cdot BD \cdot AK$, откуда $AK = 2$. Площадь круга $\pi \cdot AK^2 = 4\pi$. Внутри параллелограмма находится $\frac{1}{6}$ часть круга.

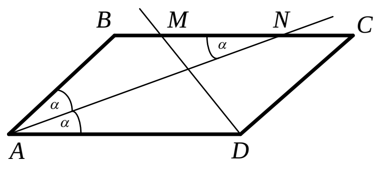




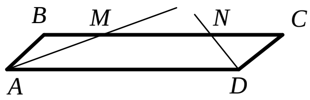
II. Вариант. Рассчитайте вариант тупого $\angle A$.

2. В параллелограмме $ABCD$ биссектрисы при стороне AD делят сторону BC в точках M и N так, что $BM : MN = 1:5$. Найдите длину стороны BC, если $AB = 3$. **Ответ:** $3,5$; 21.

I. Вариант. Треугольник ABN равнобедренный, следовательно, $BN = 3$, и $BM = 0,5$. Треугольник DMC также равнобедренный и $CM = 3$. Получаем $BC = BM + MC = 3,5$.

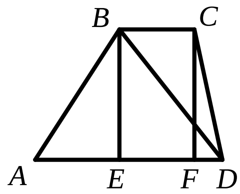


II. Вариант. Рассчитайте другой вариант расположения биссектрис.

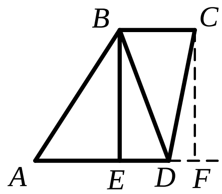


3. В трапеции $ABCD$ основание $BC = 10$, а боковые стороны $AB = 36$ и $CD = 34$. Известно, что $\cos\angle ABC = -\frac{1}{3}$. Найдите BD. **Ответ:** 36; $8\sqrt{19}$.

I. Вариант. Т.к. $\angle ABC + \angle BAD = 180^0$, то $\cos\angle BAC = \frac{1}{3}$, $\sin\angle BAC = \frac{2\sqrt{2}}{3}$. В треугольнике ABE найдем $BE = 24\sqrt{2}$ и $AE = 12$. По теореме Пифагора найдем $DF = 2$. Получаем $ED = EF + FD = 12$. В треугольнике BED по теореме Пифагора найдем $BD = 36$.

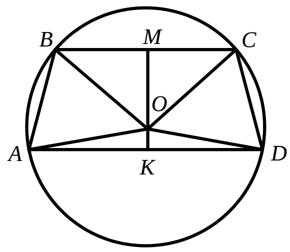


II. Вариант. Рассмотрите другой вариант трапеции.



4. Трапеция с основаниями 14 и 40 вписана в окружность радиуса 25. Найдите высоту трапеции. **Ответ**: 9; 39.

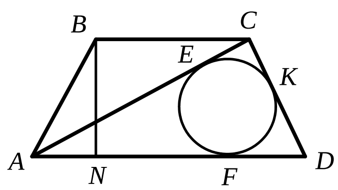
I. Вариант. Пусть центр окружности расположен внутри трапеции. Проведем высоту трапеции через центр окружности O. Т.к. перпендикуляр к хорде делит ее пополам, то $MC = 7$, а $KD = 20$. По теореме Пифагора найдем $MO = 24$ и $KO = 15$. Следовательно, $MK = 39$.



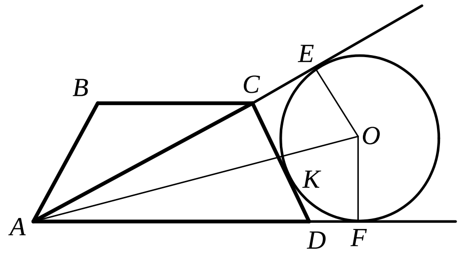
II. Вариант. Рассчитайте вариант расположения центра окружности вне трапеции.

5. Дана трапеция $ABCD$, основания которой $BC = 44$ и $AD = 100$. Боковые стороны $AB = CD = 35$. Окружность, касающаяся прямых AD и AC, касается стороны CD в точке K. Найдите длину отрезка CK. **Ответ**: 5; 30.

I. Вариант. Найдем высоту трапеции $BN = 21$. Их треугольника ABN найдем $\cos\angle D = \cos\angle A = 0{,}8$. По теореме косинусов найдем $AC = 75$. Пусть $CK = x$, $DK = y$, а $AE = z$. Получаем систему $x + y = 35$, $z + y = 100$ и $x + z = 75$. Из системы получаем $CK = 5$.

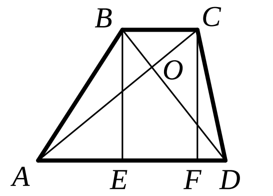


II. Вариант. Рассчитайте вариант расположения окружности вне трапеции. Воспользуйтесь равенством треугольников AEO и AFO. Тогда $x+75=y+100$, а $x+y=35$.

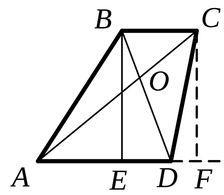


6. В трапеции $ABCD$ основание $BC=10$, а боковые стороны $AB=30$ и $CD=25$,диагонали пересекаются в точке O Высота трапеции равна 24. Найдите площадь треугольника AOB.
Ответ: $\frac{280}{3}$; $\frac{2520}{31}$.

I. Вариант. Найдем $AE=18$ и $FD=7$. Следовательно, $AD=35$. Треугольники AOD и BOC подобны с коэффициентом подобия $k=\frac{35}{10}=3{,}5$. Следовательно, $S_{AOD}=k^2\cdot S_{BOC}$. Обозначим $S_{AOB}=S_0$. Из подобия треугольников AOD и BOC легко доказать, что $S_{COD}=S_{AOB}=S_0$. Пусть $S_{BOC}=S_1$, а $S_{AOD}=S_2$. Площади S_0, S_1 и S_2 удовлетворяют соотношению ${S_0}^2=S_1S_2$ или $S_0=kS_1$. Найдем площадь трапеции $S=540$. Составим уравнение $2S_0+S_1+S_2=540$. Учитывая предыдущие соотношения, найдем $S_1=\frac{80}{3}$ $S_0=\frac{280}{3}$.



II. Вариант. Рассмотрите другой вариант трапеции.



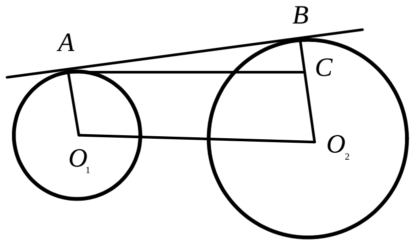
Материал разработан преподавателем математики
подготовительных курсов
Учебного центра «Азъ»
Трубецким Алексеем Петровичем

Подготовка к С4

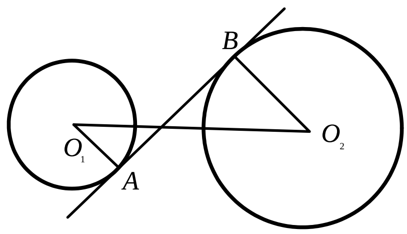
Взаимное расположение окружностей.

1. Найдите длину отрезка общей касательной к двум окружностям, заключенного между точками касания, если радиусы окружностей равны 23 и 7, а расстояние между центрами окружностей равно 34. **Ответ**: 16; 30.

I. Вариант. Радиусы O_1A и O_2B перпендикулярны касательной AB Проведем AC параллельно O_1O_2. Очевидно, что $AC = 34$, а $BC = 16$. По теореме Пифагора найдем $AB = 30$.

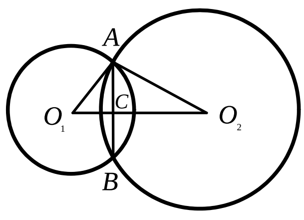


II. Вариант. Другой вариант общей касательной рассчитайте самостоятельно.

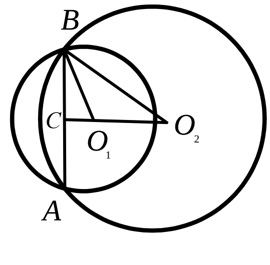


2. Расстояние между центрами двух окружностей равно 20, длина радиуса одной из них равна 10. Окружности пересекаются в точках A и B, причем $AB = 12$. Найдите длину радиуса второй окружности. **Ответ**: $6\sqrt{5}$; $2\sqrt{205}$.

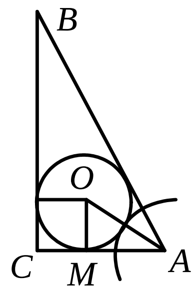
I. Вариант. Пусть $AC = 10$. Из треугольника AO_1C найдем $O_1C = 8$, тогда $O_2C = 12$. По теореме Пифагора найдем $AO_2 = 6\sqrt{5}$.



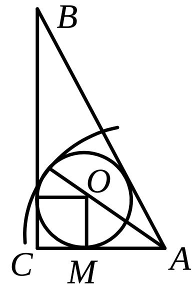
II. Вариант. Другой вариант расположения окружностей рассчитайте самостоятельно.



3. В треугольнике ABC $AB=\sqrt{3}+1$, $\angle ABC=30^0$, $\angle ACB=90^0$. Найдите длину радиуса окружности с центром в точке A касающейся окружности, вписанной в треугольник ABC. **Ответ**: $0,5$; $1,5$.

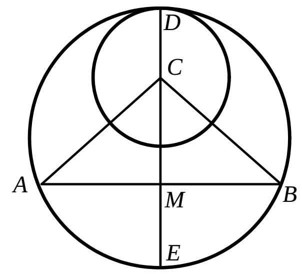


I. Вариант. Найдем $AC=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$ и $BC=\dfrac{\sqrt{3}+3}{2}$. По формуле $r=\dfrac{S}{p}$ найдем радиус вписанной окружности $r=\dfrac{1}{2}$. Обозначим искомый радиус R. В треугольнике AOM $OA=R+r$, $OM=\dfrac{1}{2}$ и $AM=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Запишем теорему Пифагора для этого треуголника $\left(R+\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{4}$. Откуда $R=0,5$.

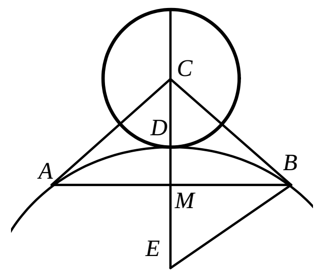


II. Вариант. Другой вариант расположения окружностей рассчитайте самостоятельно.

4. В треугольнике ACB $AB=8$, а $AC=CB=5$. Вершина C служит центром окружности радиуса 2. Найдите длину радиуса окружности, касающейся данной окружности и проходящей через концы стороны AB. **Ответ**: $8,5$; $4,1$.



I. Вариант. Рассмотрим вариант внутреннего касания окружностей. Найдем по теореме Пифагора $CM=3$. По теореме о пересекающихся хордах $ME\cdot MD=AM\cdot MB$ или $(2R-5)\cdot 5=4\cdot 4$. Получаем $R=4,1$.



II. Вариант. Пусть окружности касаются внешне. Радиус можно найти из треугольника EMB.

Материал разработан преподавателем математики
подготовительных курсов
Учебного центра «Азъ»
Трубецким Алексеем Петровичем

Подготовка к С4

Задачи для самостоятельного решения.

1. Около круга, площадь которого равна π, описана равнобедренная трапеция, площадь которой равна 5. Найдите длину большего основания трапеции. **Ответ:** 4.

2. В равнобедренной трапеции $ABCD$ длины оснований AD и BC равны соответственно 4 и 3. Найдите расстояние от точки A до прямой DB, если длина стороны $AB = 2$. **Ответ:** $0,5\sqrt{15}$.

3. Длина радиуса окружности $R = 6$. На окружности взяты точки A и B, причем $AB = \frac{2}{3}R$. Точка C принадлежит диаметру AD, причем $AC = 1,5R$. Найдите площадь треугольника ABC. **Ответ:** $12\sqrt{2}$.

4. Отношение длин катетов в прямоугольном треугольнике равно $2:1$. Найдите отношение площади треугольника к площади описанного круга. **Ответ:** $\frac{4}{5\pi}$.

5. Длина высоты равнобедренного треугольника равна $\sqrt{5}$. Окружность, центр которой лежит на основании, касается боковых сторон. Найдите площадь треугольника, если длина радиуса окружности равна 1. **Ответ:** $2,5$.

6. Из одной точки окружности проведены две хорды с длинами 4 и 6. Найдите длину радиуса окружности, если расстояние между серединами хорд равно $\sqrt{7}$. **Ответ**: $\frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{3}}$.

7. В прямоугольном треугольнике ABC на гипотенузе AB выбрана точка K так, что $BK = 2AK$. Найдите площадь этого треугольника, если $AC = 6$, а $BC = 2CK$. **Ответ**: $\frac{72}{\sqrt{5}}$.

8. Из одной точки к окружности проведены две касательные. Длина каждой касательной равна $\frac{4\sqrt{7}}{3}$. Расстояние между точками касания равно $2\sqrt{7}$. Найдите площадь круга, ограниченного этой окружностью. **Ответ**: 16π.

9. В треугольнике ABC $AB = 4$, $BC = 3\sqrt{2}$, $\sin\angle ABC = \frac{1}{3}$. Найдите AC. **Ответ**: $\sqrt{2}$; $\sqrt{66}$.

10. В треугольнике ABC $AB = 15$, $BC = 8$, $AC = 9$. Точка D лежит на прямой BC так, что $BD : DC = 3:8$. Окружности, вписанные в треугольники ADC и ADB, касаются стороны AD в точках E и F. Найдите длину отрезка EF. **Ответ**: 7; $\frac{53}{11}$.

11. Длина окружности равна 10π, AC – диаметр этой окружности. Точка B лежит на окружности, причем площадь треугольника ABC равна 15. Найти величину угла $\angle CAB$.

Ответ: $\operatorname{arctg} 3$; $\operatorname{arctg} 0,3$.

12. Окружности с центрами в точках O_1 и O_2 пересекаются в точках A и B. Известно, что $\angle AO_1B = 90^0$, $\angle AO_2B = 60^0$, $O_1O_2 = \sqrt{3}+1$. Найдите длины радиусов окружностей.

Ответ: $\sqrt{2}$; 2 или $\sqrt{2}\left(2+\sqrt{3}\right); 2\left(2+\sqrt{3}\right)$.

13. В трапеции $ABCD$ боковые стороны $AB = 27$ и $CD = 28$. Верхнее основание $BC = 5$. Известно, что $\cos\angle BCD = -\frac{2}{7}$. Найдите AC. **Ответ**: 28; $2\sqrt{181}$.

14. Длины оснований трапеции равны 4 и 6. Прямая, параллельная основаниям делит трапецию на две трапеции, площади которых относятся как $2:3$. Найдите длину отрезка этой прямой, заключенной внутри трапеции. **Ответ**: $2\sqrt{6}$; $2\sqrt{7}$.

15. Через середину стороны AB квадрата $ABCD$ проведена прямая, пересекающая прямые AD и CD в точках M и T соответственно. Прямая MT образует с прямой AB угол α, причем $\operatorname{tg}\alpha = 3$. Найдите площадь треугольника BMT, если $AB = 4$. **Ответ**: 2; 10.

16. Площадь трапеции $ABCD$ равна 135, одно основание вдвое больше другого. Диагонали трапеции пересекаются в точке O. Отрезки, соединяющие середину основания AD с вершинами B и C, пересекаются с диагоналями трапеции в точках M и N. Найдите площадь треугольника MON. **Ответ**: $3,75$; $2,4$.

17. Диагонали AC и BD трапеции $ABCD$ пересекаются в точке E. Найдите площадь трапеции, если площадь треугольника AED равна 9, а точка E делит одну из диагоналей в отношении $1:3$. **Ответ**: $16; 48$; 144.