МАТЕМАТИКА ЕГЭ 2012

Системы неравенств с одной переменной (типовые задания С3)


Прокофьев А.А.

Корянов А.Г.


Прокофьев А.А. – доктор педагогических наук, заведующий кафедрой высшей математики №1 НИУ МИЭТ, учитель математики ГОУ лицей №1557 г. Зеленограда; e-mail: aaprokof@yandex.ru
Корянов А.Г. – методист по математике городского информационно-методического Центра (ГИМЦ) г. Брянска, учитель математики МОУ лицей №27 г. Брянска; e-mail: akoryanov@mail.ru

СОДЕРЖАНИЕ

Введение.

Прежде чем перейти к рассмотрению неравенств, остановимся на некоторых важных вопросах, имеющих непосредственное отношение к решению этих неравенств.

область определения выражения

Основные ограничения на переменную, входящую в выражение, связаны с действием деления (деление на нуль не определено), действием извлечения корня четной степени (корень четной степени определен для неотрицательных чисел), действием нахождения логарифма (логарифм с положительным основанием, отличным от единицы, определен для положительных чисел).

Из определения корня натуральной степени следует, что выражения вида $\sqrt[6]{-4}$, $\sqrt[-2]{5}$, $\sqrt[0]{8}$ не определены.

Из определения логарифма следует, что выражения вида $\log_3(-4)$, $\log_7 0$, $\log_{-6} 5$, $\log_0 9$, $\log_1 15$ не определены.

Отметим, что решение неравенств с переменной включает в себя нахождение области определения данного неравенства или по-другому – области допустимых значений неизвестной неравенства.

следствие и равносильность

Если множество решений неравенства A принадлежит множеству решений неравенства (системы, совокупности) B, то неравенство (система, совокупность) B называется следствием неравенства A, и это обозначают $A \Rightarrow B$.

Если множества решений неравенства A и неравенства (системы, совокупности) B совпадают, то эти неравенства (неравенство и система, неравенство и совокупность) называются равносильными, и это обозначают $A \Leftrightarrow B$.

Как правило, преобразования используют для того, чтобы в неравенстве освободиться от знаменателей, от знаков корней, от знаков модуля, от степеней, от знаков логарифма, и привести данное неравенство к более простым неравенствам. При этом выполняют преобразования над обеими частями неравенства, используя свойство монотонности соответствующей функции, или преобразования отдельных выражений, входящих в неравенство, применяя формулы. Применение формулы для замены одного выражения другим может оказаться неравносильным для неравенства.

Приведем примеры равносильных переходов.

1) $\log_3 x > 1 \Leftrightarrow \log_3 x > \log_3 3 \Leftrightarrow x > 3.$

2) $(x-1)\log_3 x \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-1 \ge 0, \\ \log_3 x \ge 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x-1 \le 0, \\ \log_3 x \le 0. \end{cases} \end{array}\right.$

3) $\lg(x-2)+\lg(27-x) \le 2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2>0, \\ 27-x>0, \\ \lg\big((x-2)(27-x)\big) \le 2. \end{cases}$$

4) $\sqrt{x+2} \le x \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0, \\ x+2 \ge 0, \\ x+2 \le x^2. \end{cases}$

системы неравенств и совокупности неравенств

Решение неравенства с использованием равносильных преобразований часто приводит к решению системы или совокупности неравенств.

При решении системы неравенств с одной переменной обычно решают каждое неравенство, затем находят пересечение полученных множеств решений.

При решении совокупности неравенств с одной переменной обычно решают каждое неравенство, затем находят объединение полученных множеств решений.

Две системы (совокупности) неравенств называются равносильными, если множества их решений совпадают.

Приведем примеры решения системы неравенств и совокупности неравенств.

1) $\begin{cases} 6x+2 \le 4x+24, \\ 2x-1 \ge x+7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x \le 22, \\ x \ge 8 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \le 11, \\ x \ge 8 \end{cases} \Leftrightarrow 8 \le x \le 11.$$

2) $\left[\begin{array}{l} x^2-4>0, \\ x-6<0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (x-2)(x+2)>0, \\ x<6 \end{array}\right. \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x<-2, \\ x>2, \end{array}\right. \\ x<6 \end{array}\right. \Leftrightarrow -\infty < x < +\infty.$$

сравнение чисел

Иногда при решении неравенств одним из трудоемких этапов является сравнение значений чисел для правильного расположения их относительно друг друга на числовой прямой. Это возникает в случае объединения или пересечения промежутков, числовые значения концов которых выражаются через радикалы, логарифмы и т.д. Приходится сталкиваться с необходимостью сравнения чисел без помощи микрокалькулятора. Рассмотрим некоторые подходы к решению задач такого типа.

1. Сравнение числовых выражений

При решении различных неравенств и их систем на этапе получения ответа, в частности нанесения их решений на одну числовую прямую, приходится сравнивать числовые значения, соответствующие концам промежутков, из которых состоят соответствующие множества решений. Довольно часто подобное сравнение является не очевидным и представляет ключевой этап решения задачи. На помощь приходит использование свойств числовых неравенств (к обеим частям можно прибавлять одно и то же число; можно умножать обе части неравенства на положительное число и т.д.), а также некоторые специальные приемы.

Здесь не требуется находить значения чисел с точностью до определенного десятичного знака после запятой. Но с другой стороны, для старшеклассника считается известным десятичные знаки после запятой некоторых чисел ($\sqrt{2}=1{,}41...$; $\sqrt{3}=1{,}73...$; $e=2{,}71...$; $\pi=3{,}14...$), которые он вправе использовать при сравнении чисел, точно так же, как знание степеней некоторых чисел ($11^2=121$; $6^3=216$; $2^{10}=1024$ и т.д.).

1.1. Методы сравнения числовых выражений

При сравнении числовых выражений A и B используют следующие общие методы.

метод сравнения с нулем разности выражений

В этом случае сравнивают разность выражений с нулем.

Если $A-B>0$, то $A>B$;
если $A-B=0$, то $A=B$;
если $A-B<0$, то $A<B$.

Пример 1. *Сравнить числа* $\frac{1}{\sqrt{6}}-1$ *и* $-\frac{4}{5}$.

Решение. Найдем разность

$$\frac{1}{\sqrt{6}}-1-\left(-\frac{4}{5}\right)=\frac{1}{\sqrt{6}}-\frac{1}{5}=\frac{5-\sqrt{6}}{5\sqrt{6}}.$$

Так как $5-\sqrt{6}=\sqrt{25}-\sqrt{6}>0$ и $5\sqrt{6}>0$, то $\frac{5-\sqrt{6}}{5\sqrt{6}}>0$ и $\frac{1}{\sqrt{6}}-1>-\frac{4}{5}$.

Ответ: $\frac{1}{\sqrt{6}}-1>-\frac{4}{5}$.

метод сравнения с единицей отношения выражений

Если выражения A и B положительны, то для определения большего из них можно сравнить их отношение с единицей.

Если $\frac{A}{B}>1$, то $A>B$;

если $\frac{A}{B}=1$, то $A=B$;

если $\frac{A}{B}<1$, то $A<B$.

Пример 2. *Сравнить числа*

$$\frac{2^{2010}+1}{2^{2011}+1} \text{ и } \frac{2^{2011}+1}{2^{2012}+1}.$$

Решение. Пусть A – первое выражение, а B – второе. Поскольку они оба положительны, то рассмотрим их частное

$$\frac{A}{B}=\frac{2^{2010}+1}{2^{2011}+1}:\frac{2^{2011}+1}{2^{2012}+1}=\frac{2^{4022}+5\cdot 2^{2010}+1}{2^{4022}+4\cdot 2^{2010}+1}.$$

Так как числитель получившейся дроби больше знаменателя, то $\frac{A}{B}>1$. Отсюда следует, что $A>B$.

Ответ: $\frac{2^{2010}+1}{2^{2011}+1}>\frac{2^{2011}+1}{2^{2012}+1}$.

метод разделения выражений

Если удается показать, что одно из сравниваемых выражений больше некоторого числа (или выражения), а другое наоборот меньше него, то первое выражение будет больше второго, т.е. из неравенств $A>C>B$ следует неравенство $A>B$.

Пример 3. *Сравнить числа* $\log_2 5$ *и* $\log_3 6$.

Решение. Заметим, что $\log_2 5>\log_2 4=2$, а $\log_3 6<\log_3 9=2$. Следовательно, имеем

$$\log_2 5 > 2 > \log_3 6 \Leftrightarrow \log_2 5 > \log_3 6.$$

Ответ: $\log_2 5 > \log_3 6$.

метод использования параметра

Пример 4. *Сравнить числа* $\sqrt[3]{60}$ *и* $2+\sqrt[3]{7}$.

Решение. Представим первое число следующим образом. $\sqrt[3]{60}=\sqrt[3]{4(8+7)}$. Пусть $a=2$ и $b=\sqrt[3]{7}$. Сравним выражения:

$$\sqrt[3]{4(a^3+b^3)} \vee a+b \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4(a^3+b^3) \vee (a+b)^3 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3(a^3+b^3) \vee 3ab(a+b) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow a^2-ab+b^2 \vee ab \Leftrightarrow (a-b)^2 \vee 0.$$

Так как $a \ne b$, то $(a-b)^2>0$ и тогда $\sqrt[3]{60} > 2+\sqrt[3]{7}$.

Ответ: $\sqrt[3]{60} > 2+\sqrt[3]{7}$.

метод использования свойств функций

В этом случае для сравнения выражений используют монотонность и выпуклость функций на промежутках.

Пример 5. *Сравнить числа* e^{π} *и* π^e.

Решение. Заметим, что

$$e^{\pi} \vee \pi^e \Leftrightarrow \ln e^{\pi} \vee \ln \pi^e \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \pi \ln e \vee e \ln \pi \Leftrightarrow \frac{\ln e}{e} \vee \frac{\ln \pi}{\pi}.$$

Рассмотрим функцию $f(x)=\frac{\ln x}{x}$ и сравним числа $f(e)$ и $f(\pi)$. Функция $f(x)$ определена при $x>0$. Ее производная равна $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$. Так как $f'(x)=0$ при $x=e$, $f'(x)>0$ при $0<x<e$ и $f'(x)<0$ при $x>e$, то функция при $x=e$ принимает наибольшее значение на всей области определения. Значит, $f(e)>f(\pi)$, откуда следует, что $e^{\pi}>\pi^e$.

Ответ: $e^{\pi}>\pi^e$.

графический метод

Графический метод удобно использовать при сравнении двух выражений, которые частично одинаковы (равные показатели степеней, равные основания степеней, равные показатели корней, равные подкоренные числа, равные основания логарифмов, равные подлогарифмические числа и т.д.).

Пример 6. *Сравнить числа* $\log_3 6$ *и* $\log_4 6$.

Решение. Построим схематично графики функций $y=\log_3 x$ и $y=\log_4 x$ (рис. 1).

Сравнивая значения функций при $x=6$, получаем $\log_3 6 > \log_4 6$.

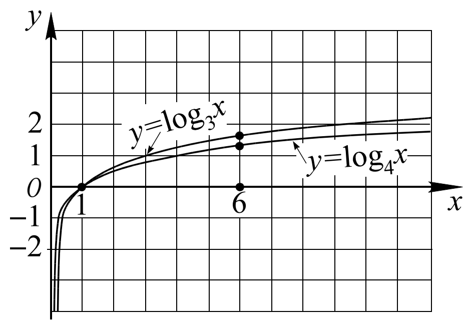

Рис. 1

Ответ: $\log_3 6 > \log_4 6$.

метод использования классических неравенств

Обычно достаточно знания следующих классических неравенств:

неравенство Коши:
при любом $n \in \mathbf{N}$ для неотрицательных чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$

$$\frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n} \ge \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n};$$

неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим неотрицательных чисел a_1 *и* a_2 (случай $n=2$ в неравенстве *Коши*):

$$\frac{a_1+a_2}{2} \ge \sqrt{a_1 a_2};$$

неравенство для суммы двух взаимно обратных чисел:

$$\left|a+\frac{1}{a}\right| \ge 2;$$

неравенство Бернулли:
для любого $n \in \mathbf{N}$ при $x \ge -1$

$$(1+x)^n \ge 1+nx.$$

Пример 7. *Сравнить числа*:

а) $\dfrac{1}{\log_2 5}+\dfrac{1}{\log_5 2}$ *и* 2; **б)** $\sqrt[200]{2}$ *и* 1,005.

Решение. **а)** Заметим, что $\log_5 2>0$ и

$$\frac{1}{\log_2 5}+\frac{1}{\log_5 2}=\log_5 2+\frac{1}{\log_5 2}.$$

Выражение в правой части равенства представляет собой сумму двух взаимно обратных положительных чисел, отличных от единицы. Значит,

$$\log_5 2+\frac{1}{\log_5 2}>2.$$

б) Возводя оба числа в двухсотую степень, получим:

$$\sqrt[200]{2}\vee 1{,}005 \Leftrightarrow 2\vee (1{,}005)^{200}.$$

Используя неравенство Бернулли, имеем:

$$(1{,}005)^{200}=(1+0{,}005)^{200}>1+200\cdot 0{,}005=2.$$

Значит второе число больше первого.

Ответ: а) $\dfrac{1}{\log_2 5}+\dfrac{1}{\log_5 2}>2$;

б) $1{,}005>\sqrt[200]{2}$.

1.2. Сравнение действительных чисел

При сравнении действительных чисел используют следующие правила.

- Всякое положительное число больше нуля и больше отрицательного числа.
- Всякое отрицательное число меньше нуля.
- Из двух положительных действительных чисел больше то, у которого целая часть больше. Если целые части равны, большим считается то число, у которого первый из неравных десятичных знаков в их записи в виде десятичной дроби больший, а все предшествующие одинаковы.
- Из двух отрицательных чисел больше то, у которого абсолютная величина меньше.

Пример 8. *Сравнить числа* π, $\sqrt{10}$ *и* 3,14(15).

Решение. Так как $\pi=3{,}14159...$, $\sqrt{10}=3{,}16227...$ и $3{,}14(15)=3{,}141515...$, то видим, что совпадают целые части и цифры десятых, а цифра сотых у числа $\sqrt{10}$ больше, чем у числа π и 3,14(15). Следовательно, $\sqrt{10}>\pi$ и $\sqrt{10}>3{,}14(15)$. Соответственно, у чисел π и 3,14(15) совпадают первые четыре цифры после запятой, а пятая больше у числа π. Следовательно, $\pi>3{,}14(15)$.

Замечание. Данный пример приведен для раскрытия правила сравнения действительных чисел, записанных в виде бесконечных десятичных дробей до определенного знака.

Ответ: $\sqrt{10}>\pi>3{,}14(15)$.

1.3. Сравнение выражений, содержащих дроби

При сравнении двух обыкновенных дробей используют следующие правила.

- Из двух дробей с одинаковыми знаменателями та дробь больше, у которой больший числитель.
- Из двух дробей с одинаковыми числителями та дробь больше, у которой знаменатель меньше.

При сравнении двух обыкновенных дробей с разными числителями и знаменателями их можно привести к общему знаменателю (или умножить обе части сравнения на общий знаменатель).

Пример 9. *Сравнить числа* $\dfrac{15}{17}$ *и* $\dfrac{23}{26}$.

Решение. Приводя дроби к общему знаменателю и используя первое правило, получаем

$$\frac{15}{17}\vee\frac{23}{26}\Leftrightarrow\frac{15\cdot 26}{17\cdot 26}\vee\frac{23\cdot 17}{26\cdot 17}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 15\cdot 26\vee 23\cdot 17\Leftrightarrow 390\vee 391.$$

Отсюда следует, что $\dfrac{15}{17}<\dfrac{23}{26}$.

Ответ: $\dfrac{15}{17}<\dfrac{23}{26}$.

Для сравнения дробей часто используют метод сравнения с нулем разности выражений или метод сравнения с единицей отношения выражений.

Пример 10. *Сравнить числа* $\frac{131}{273}$ *и* $\frac{179}{235}$.

Решение. Рассмотрим частное данных чисел

$$\frac{131}{273}:\frac{179}{235}=\frac{131}{179}\cdot\frac{235}{273}<1,$$

так как каждая из дробей меньше 1. Значит, $\frac{131}{273}<\frac{179}{235}$.

Ответ: $\frac{131}{273}<\frac{179}{235}$.

Тренировочные упражнения

Сравните числа:

1. $a=\frac{8}{7}$ и $b=\frac{9}{7}$; **2.** $a=-\frac{6}{11}$ и $b=-\frac{7}{11}$;

3. $a=\frac{6}{9}$ и $b=-\frac{7}{9}$; **4.** $a=-\frac{13}{123}$ и $b=-\frac{13}{129}$;

5. $a=\frac{4}{5}$ и $b=\frac{5}{6}$; **6.** $a=0,(3)$ и $b=\frac{1}{3}$;

7. $a=\frac{124}{119}$ и $b=\frac{137}{129}$.

1.4. Сравнение выражений, содержащих степени

При сравнении двух степеней с одинаковыми показателями или одинаковыми основаниями, используют следующие правила.

● Если натуральное число n нечетно и $a>b$, то $a^n>b^n$.

● Если натуральное число n четно и $a>b$, то:

а) для положительных a и b имеем $a^n>b^n$;

б) для отрицательных a и b имеем $a^n<b^n$.

● Если $a>1$ и $m>n$, то $a^m>a^n$.

● Если $0<a<1$ и $m>n$, то $a^m<a^n$.

При сравнении двух степеней с разными показателями и основаниями обычно в них выделяют одинаковое основание или одинаковый показатель.

Пример 11. *Сравнить числа:*

а) 5^{60} *и* 8^{20}; **б)** 2^{30} *и* 4^{14};

в) $2{,}5^{\frac{\sqrt5}{6}}$ и $0{,}4^{-0,5}$; **г)** 7^{30} и 4^{40}; **д)** 3^{21} и 2^{31}.

Решение. **а)** Так как $8^{20}=2^{60}$ и $5>2$, то $5^{60}>2^{60}$ и $5^{60}>8^{20}$.

б) Так как $4^{14}=2^{28}$ и $30>28$, то $2^{30}>2^{28}$ и $2^{30}>4^{14}$.

в) Заметим, что $2{,}5^{\frac{\sqrt5}{6}}=\left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{\sqrt5}{6}}$, а $0{,}4^{-0,5}=\left(\frac{2}{5}\right)^{-0,5}=\left(\frac{5}{2}\right)^{0,5}$.

Теперь сравним показатели степени $\frac{\sqrt5}{6}$ и 0,5. Так как $\sqrt5<3$, то $\frac{\sqrt5}{6}<\frac{3}{6}=0{,}5$. Следовательно,

$$\left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{\sqrt5}{6}}<\left(\frac{5}{2}\right)^{0,5},\ \text{т.е. } 2{,}5^{\frac{\sqrt5}{6}}<0{,}4^{-0,5}.$$

г) 1-*й способ.* Заметим, что $7^{30}=(7^3)^{10}=343^{10}$ и $4^{40}=(4^4)^{10}=256^{10}$. Так как $343>256$, то из свойств степеней следует $343^{10}>256^{10}$ или $7^{30}>4^{40}$.

2-*й способ.* Представим степень 7^{30} как степень с основанием 4. В силу основного логарифмического тождества $7=4^{\log_4 7}$. Поэтому $7^{30}=4^{30\cdot\log_4 7}$. Теперь сравним число $30\cdot\log_4 7$ с числом 40. Учитывая свойство возрастающей функции $y=\log_4 t$, имеем

$$30\cdot\log_4 7=10\cdot\log_4 7^3=10\cdot\log_4 343>$$
$$>10\cdot\log_4 256=40.$$

Следовательно, в силу того, что функция $y=4^t$ возрастающая (или в силу свойства степеней), получим $7^{30}>4^{40}$.

д) Имеем

$$3^{21}=3^{20}\cdot3=9^{10}\cdot3$$

и

$$2^{31}=2^{30}\cdot2=8^{10}\cdot2.$$

Так как $9^{10}>8^{10}$ и $3>2$, то $9^{10}\cdot3>8^{10}\cdot2$ и $3^{21}>2^{31}$.

Ответ: а) $5^{60}>8^{20}$; **б)** $2^{30}>4^{14}$;
в) $2{,}5^{\frac{\sqrt5}{6}}<0{,}4^{-0,5}$; **г)** $7^{30}>4^{40}$;
д) $3^{21}>2^{31}$.

Пример 12. *Сравнить числа* 13^5 *и* 23^4.

Решение. Воспользуемся формулой бинома Ньютона.

$$13^5 = (12+1)^5 > 12^5 + 5\cdot 12^4 = 12^4(12+5) =$$
$$= 17\cdot 12^4 > 16\cdot 12^4 = 2^4\cdot 12^4 = 24^4 > 23^4.$$

Ответ: $13^5 > 23^4$.

Тренировочные упражнения

Сравните числа:

8. $a = 3^{10}$ и $b = 4^{10}$;

9. $a = -0{,}5^{13}$ и $b = -0{,}7^{13}$;

10. $a = 0{,}5^{10}$ и $b = 0{,}5^{20}$;

11. $a = 14^{15}$ и $b = 4^{25}$;

12. $a = (2\sqrt{2})^{100}$ и $b = 8^{49}$;

13. $a = 2^{300}$ и $b = 3^{200}$;

14. $a = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{-\frac{\sqrt{2}}{3}}$ и $b = 1$;

15. $a = 3^{50}$ и $b = 6^{30}$;

16. $a = 3^{52}$ и $b = 4^{39}$.

1.5. Сравнение выражений, содержащих корни натуральной степени

При сравнении двух выражений, содержащих одинаковые корни натуральных степеней, используют следующие правила.

- Если натуральное число $n > 1$ нечетно и $a > b$, то $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$.
- Если натуральное число $n > 1$ четно и $a > b > 0$, то $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$.

При сравнении двух выражений, содержащих разные корни натуральных степеней, обычно их приводят к корням с одинаковыми показателями, либо возводят в степень для избавления от корней.

Пример 13. *Сравнить числа:*

а) $\sqrt[5]{\dfrac{15}{16}}$ *и* $\sqrt[5]{\dfrac{16}{17}}$;   **б)** $\sqrt[12]{623}$ и $\sqrt[3]{5}$.

Решение. **а)** Сравним подкоренные числа

$$\frac{15}{16} - \frac{16}{17} = \frac{15\cdot 17 - 16\cdot 16}{16\cdot 17} = -\frac{1}{16\cdot 17} < 0.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{15}{16} < \frac{16}{17} \text{ и } \sqrt[5]{\frac{15}{16}} < \sqrt[5]{\frac{16}{17}}.$$

б) По свойству арифметических корней имеем $\sqrt[12]{5^4} = \sqrt[12]{625}$. Так как $623 < 625$, то

$$\sqrt[12]{623} < \sqrt[12]{625} \text{ и } \sqrt[12]{623} < \sqrt[3]{5}.$$

Ответ: а) $\sqrt[5]{\dfrac{15}{16}} < \sqrt[5]{\dfrac{16}{17}}$; **б)** $\sqrt[12]{623} < \sqrt[3]{5}$.

Пример 14. *Сравнить числа* $\sqrt{7} - \sqrt{5}$ *и* $\sqrt{15} - \sqrt{12}$.

Решение. Так как оба числа положительны, то можем сравнить их натуральные степени (квадраты). При этом знак сравнения не меняется.

$$\sqrt{7} - \sqrt{5} \vee \sqrt{15} - \sqrt{12} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\sqrt{7} - \sqrt{5})^2 \vee (\sqrt{15} - \sqrt{12})^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 12 - 2\sqrt{35} \vee 27 - 2\sqrt{180} \Leftrightarrow$$

(уменьшаем теперь каждое число на 12)

$$\Leftrightarrow -2\sqrt{35} \vee 15 - 2\sqrt{180} \Leftrightarrow$$

(прибавляем к каждому из полученных чисел сумму $2\sqrt{35} + 2\sqrt{180}$)

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{180} \vee 15 + 2\sqrt{35} \Leftrightarrow$$

(так как оба числа положительны, то сравниваем их квадраты)

$$\Leftrightarrow 720 \vee 365 + 60\sqrt{35} \Leftrightarrow$$

(поделим оба числа на 5)

$$\Leftrightarrow 144 \vee 73 + 12\sqrt{35} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 71 \vee 12\sqrt{35} \Leftrightarrow$$

(еще раз возведем, полученные числа в квадрат)

$$\Leftrightarrow 71^2 \vee (12\sqrt{35})^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 5041 > 5040.$$

В итоге, выполнив ряд преобразований, мы получили, что знак неравенства между исходными числами тот же, что и между числами 5041 и 5040. Так как $5041 > 5040$, то $\sqrt{7} - \sqrt{5} > \sqrt{15} - \sqrt{12}$.

Ответ. $\sqrt{7}-\sqrt{5}>\sqrt{15}-\sqrt{12}$.

Иногда удобно умножать сравниваемые выражения на одно и то же выражение, например, для выделения разности квадратов. Для неотрицательных чисел a и b справедлива формула

$$(\sqrt{a}-\sqrt{b})\cdot(\sqrt{a}+\sqrt{b})=a-b.$$

Выражения $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ и $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ называются *сопряженными*.

Пример 15. *Сравнить числа* $\sqrt{8}-\sqrt{6}$ *и* $\sqrt{13}-\sqrt{11}$.

Решение. Домножив и поделив каждое выражение на сопряженное к нему, получим:

$$\sqrt{8}-\sqrt{6}\vee\sqrt{13}-\sqrt{11}\Leftrightarrow\frac{(\sqrt{8}-\sqrt{6})(\sqrt{8}+\sqrt{6})}{\sqrt{8}+\sqrt{6}}\vee$$

$$\vee\frac{(\sqrt{13}-\sqrt{11})(\sqrt{13}+\sqrt{11})}{\sqrt{13}+\sqrt{11}}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{2}{\sqrt{8}+\sqrt{6}}\vee\frac{2}{\sqrt{13}+\sqrt{11}}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{\sqrt{8}+\sqrt{6}}\vee\frac{1}{\sqrt{13}+\sqrt{11}}.$$

Знаменатель второй дроби больше, поэтому вторая дробь меньше. Соответственно получаем, что $\sqrt{8}-\sqrt{6}>\sqrt{13}-\sqrt{11}$.

Ответ. $\sqrt{8}-\sqrt{6}>\sqrt{13}-\sqrt{11}$.

Тренировочные упражнения

Сравните числа:

17. $a=2\sqrt{5}$ и $b=\sqrt{19}$;

18. $a=\sqrt[3]{\frac{22}{7}}$ и $b=\sqrt[3]{\pi}$;

19. $a=\sqrt[3]{-\frac{123}{124}}$ и $b=\sqrt[3]{-\frac{122}{123}}$;

20. $a=\sqrt[8]{10}$ и $b=\sqrt[4]{3}$;

21. $a=\sqrt[4]{6+\sqrt{20}}$ и $b=\sqrt{1+\sqrt{5}}$;

22. $a=\sqrt{6}-\sqrt{5}$ и $b=\sqrt{8}-\sqrt{7}$;

23. $a=\sqrt{7}-\sqrt{6}$ и $b=\sqrt{12}-\sqrt{10}$;

24. $a=-3+\sqrt{17}$ и $b=5-\sqrt{15}$.

1.6. Сравнение выражений, содержащих логарифмы

При сравнении двух выражений, содержащих логарифмы, используют следующие правила.

- Если $a>1$ и $M>N>0$, то
$$\log_a M>\log_a N.$$
- Если $0<a<1$ и $M>N>0$, то
$$\log_a M<\log_a N.$$

В частности:

а) Если $a>1$ и $M>1$, то $\log_a M>0$.

б) Если $a>1$ и $0<M<1$, то $\log_a M<0$.

в) Если $0<a<1$ и $M>1$, то $\log_a M<0$.

г) Если $0<a<1$ и $0<M<1$, то $\log_a M>0$.

Пример 16. *Сравнить числа*:
а) $\log_2 5$ *и* $\log_2\pi$; **б)** $\log_{0,5}20$ *и* $\log_{0,5}7$; **в)** $\log_2 3$ *и* $\log_4 5$.

Решение. **а)** Так как $5>\pi$ и основание $2>1$, то по свойству логарифмов имеем $\log_2 5>\log_2\pi$.

б) Основание логарифмов $0<0{,}5<1$ и $20>7$. Поэтому $\log_{0,5}20<\log_{0,5}7$.

в) Так как $\log_4 5=\log_2\sqrt{5}$ и $3>\sqrt{5}$, то по свойству возрастающей функции $y=\log_2 x$ имеем $\log_2 3>\log_2\sqrt{5}$ и $\log_2 3>\log_4 5$.

Ответ: а) $\log_2 5>\log_2\pi$;
б) $\log_{0,5}20<\log_{0,5}7$;
в) $\log_2 3>\log_4 5$.

Пример 17. *Сравнить числа*

$$\log_2 5\ \textit{и}\ \log_3 7$$

Решение. Подберем «хорошее» число такое, которое больше одного логарифма и меньше другого. Так как функция $y=\log_2 x$ возрастающая, то $\log_2 5>\log_2 4=2$. Аналогично, $\log_3 7<\log_3 9=2$. Значит,

$$\log_2 5>2>\log_3 7\ \text{и}\ \log_2 5>\log_3 7;$$

Ответ: $\log_2 5>\log_3 7$.

Пример 18. *Сравнить числа*

$$\log_2 3 \text{ и } \log_5 8$$

Решение. (1-*й способ*). Так как $1<\log_2 3<2$ и $1<\log_5 8<2$, то укрупним (удвоим) данные числа.

Имеем $2\log_2 3=\log_2 9$ и $3<\log_2 9<4$. Аналогично, $2\log_5 8=\log_5 64$ и $2<\log_5 64<3$. Отсюда следует, что

$$2\log_2 3>2\log_5 8 \text{ и } \log_2 3>\log_5 8.$$

Решение. (2-*й способ*). Так как $\log_2 3=\log_4 9$ и по свойству функций $y=\log_t 9$ и $y=\log_5 t$ выполняется цепочка неравенств $\log_4 9>\log_5 9>\log_5 8$, то $\log_2 3>\log_5 8$.

Ответ: $\log_2 3>\log_5 8$.

Пример 19. *Сравнить числа:*

а) $\log_{0,5} 5$ *и* $\log_2 5$; **б)** $\log_{0,5} 7$ *и* $\log_{0,8} 7$; **в)** $\log_3 0,6$ *и* $\log_5 0,6$.

Решение. **а)** Так как $\log_{0,5} 5<0$, а $\log_2 5>0$, то $\log_{0,5} 5<\log_2 5$.

б) Так как $\log_{0,5} 7=\dfrac{1}{\log_7 0,5}$ и $\log_{0,8} 7=\dfrac{1}{\log_7 0,8}$, а $\log_7 0,5<\log_7 0,8<0$, то $\dfrac{1}{\log_7 0,5}<\dfrac{1}{\log_7 0,8}$ и $\log_{0,5} 7>\log_{0,8} 7$.

Замечание. Так как функция $y=\log_7 x$ на промежутке $(0;1)$ принимает отрицательные значения и является возрастающей, то на этом же промежутке функция $y=\log_x 7=\dfrac{1}{\log_7 x}$ является убывающей. Тогда для функции $y=\log_x 7$ на промежутке $(0;1)$ из неравенства $0,5<0,8$ следует неравенство $\log_{0,5} 7>\log_{0,8} 7$.

в) По свойству строго возрастающей функции $y=\log_x 0,6$ на промежутке $(1;+\infty)$ из неравенства $3<5$ следует неравенство $\log_3 0,6<\log_5 0,6$.

Ответ: а) $\log_{0,5} 5<\log_2 5$; **б)** $\log_{0,5} 7>\log_{0,8} 7$; **в)** $\log_3 0,6<\log_5 0,6$;

Пример 20. *Сравнить числа*

$$\log_{11} 12 \text{ и } \log_{12} 13.$$

Решение. Числа $\log_{11} 12$ и $\log_{12} 13$ близки друг к другу и подобрать «хорошее» число, разделяющее их, трудно.

Так как данные числа больше единицы, то «выделим» из каждого числа единицу следующим образом:

$$\log_{11} 12=\log_{11} 11\cdot\frac{12}{11}=1+\log_{11}\left(1+\frac{1}{11}\right),$$

$$\log_{12} 13=1+\log_{12}\left(1+\frac{1}{12}\right).$$

Так как функция $y=\log_{12} t$ возрастающая, а $1+\dfrac{1}{12}<1+\dfrac{1}{11}$, то

$$\log_{12}\left(1+\frac{1}{12}\right)<\log_{12}\left(1+\frac{1}{11}\right)=\frac{\log_{11}\left(1+\frac{1}{11}\right)}{\log_{11} 12}.$$

Так как при $a>0$ и $b>1$ выполняется неравенство $\dfrac{a}{b}<a$, то

$$\frac{\log_{11}\left(1+\frac{1}{11}\right)}{\log_{11} 12}<\log_{11}\left(1+\frac{1}{11}\right)$$

и, значит,

$$\log_{12}\left(1+\frac{1}{12}\right)<\log_{11}\left(1+\frac{1}{11}\right)$$

и $\log_{12} 13<\log_{11} 12$.

Замечание. «Выделение» единицы из данных чисел можно заменить вычитанием из каждого числа единицы:

$$\log_{11} 12-1=\log_{11} 12-\log_{11} 11=\log_{11}\frac{12}{11},$$

$$\log_{12} 13-1=\log_{12} 13-\log_{12} 12=\log_{12}\frac{13}{12}.$$

Ответ: $\log_{12} 13<\log_{11} 12$.

Пример 21. *Сравнить числа*:

$$\log_2 3 \text{ и } \log_3 4.$$

Решение. (1-*й способ*). Так как число $\log_2 3$ положительное, то проведем равносильные преобразования над обеими частями неравенства

$$\log_2 3 \vee \log_3 4 \Leftrightarrow \log_2 3 \vee \frac{2}{\log_2 3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\log_2 3)^2 \vee 2 \Leftrightarrow \log_2 3 \vee \sqrt{2}.$$

Из следующей цепочки сравнений

$$\log_2 3 = \log_2 \sqrt{9} > \log_2 \sqrt{8} =$$
$$= 1{,}5 = \sqrt{2{,}25} > \sqrt{2}$$

получаем, что $\log_2 3 > \log_3 4$.

Решение (*2-й способ*). Используем неравенство Коши:

$$\frac{\log_3 4}{\log_2 3} = \log_3 4 \cdot \log_3 2 \le$$

$$\le \left(\frac{\log_3 4 + \log_3 2}{2}\right)^2 = \left(\frac{\log_3 8}{2}\right)^2.$$

Так как $8 < 9$, то $\frac{\log_3 8}{2} < 1$ и $\left(\frac{\log_3 8}{2}\right)^2 < 1$. Значит, $\frac{\log_3 4}{\log_2 3} < 1$ и $\log_2 3 > \log_3 4$, учитывая, что $\log_2 3$ и $\log_3 4$ – положительные числа.

Ответ: $\log_2 3 > \log_3 4$.

Тренировочные упражнения

Сравните числа:

25. $a = \log_{0,5} 5$ и $b = \log_{0,5} 6$;

26. $a = \log_2 \frac{9}{13}$ и $b = \log_2 \frac{11}{15}$;

27. $a = \log_8 5$ и $b = \log_6 5$;

28. а) $a = \log_{0,5} 5$ и $b = \log_{0,6} 6$;

б) $a = \log_4 0{,}6$ и $b = \log_5 0{,}7$;

в) $a = \log_{0,6} 0{,}7$ и $b = \log_{0,5} 0{,}8$;

г) $a = \log_3 2$ и $b = \log_4 3$;

29. $a = \log_3 10$ и $b = 4(1 - \lg 3)$;

30. $a = 2^{\log_3 5}$ и $b = 5^{\log_3 2}$;

31. $a = 4^{\log_5 7}$ и $b = 7^{\log_5 4}$;

32. $a = \log_7 29$ и $b = \log_6 13$;

33. $a = \log_2 3 + \log_3 2$ и $b = 2$;

34. $a = \log_6 7$ и $b = \log_7 8$;

35. $a = \log_3 4$ и $b = \log_5 6$.

1.7. Сравнение выражений разного вида

При сравнении выражений разного вида используют выше приведенные методы.

Пример 22. *Сравнить числа*:

$$2\log_{12} 145 \ и \ \sqrt{15}.$$

Решение. Так как $2\log_{12} 145 > 2\log_{12} 144 = 4$ и $\sqrt{15} < \sqrt{16} = 4$, то $2\log_{12} 145 > \sqrt{15}$.

Ответ: $2\log_{12} 145 > \sqrt{15}$.

Пример 23. *Сравнить числа*:

$$\log_2 11 \ и \ 2 + \sqrt{3}.$$

Решение. Так как $\sqrt{3} > \sqrt{2{,}25} = 1{,}5$, то

$$2 + \sqrt{3} > 3{,}5 = \log_2 (8\sqrt{2}) > \log_2 (8 \cdot 1{,}4) =$$
$$= \log_2 (11{,}2) > \log_2 11.$$

Ответ: $2 + \sqrt{3} > \log_2 11$.

Тренировочные упражнения

Сравните числа:

36. $a = \log_5 3$ и $b = \frac{2}{3}$.

37. $a = \log_2 5$ и $b = 2\frac{1}{3}$.

38. $a = \log_{\log_3 2} \frac{1}{2}$ и $b = 1$.

39. $a = \log_3 (5 + \sqrt{34})$ и $b = \frac{7}{3}$.

40. $a = \log_{2+\sqrt{3}} 8$ и $b = 1{,}5$.

2. Область определения выражения (функции)

В данном пункте ограничимся нахождением области определения логарифмических выражений.

Отметим, что решение логарифмических неравенств включает в себя нахождение области определения данного неравенства или по-другому области допустимых значений (ОДЗ) неизвестной неравенства, поэтому напомним, что:

а) выражение $\log_a f(x)$, где a – постоянное положительное число, не равное 1 ($a>0, a\neq 1$), определено при всех x, принадлежащих множеству решений неравенства $f(x)>0$;

б) выражение $\log_{g(x)} f(x)$ определено при всех x, принадлежащих множеству решений системы неравенств

$$\begin{cases} g(x)>0, \\ g(x)\neq 1, \\ f(x)>0. \end{cases}$$

Рассмотрим несколько подготовительных задач.

Пример 24. *Найти область определения выражения*

$$\log_3\left(2x^2+10x+5\right)+\log_3\left(2+3x-x^2\right).$$

Решение. Данная задача сводится к решению следующей системы неравенств

$$\begin{cases} 2x^2+10x+5>0, \\ 2+3x-x^2>0. \end{cases}$$

Решение первого неравенства этой системы есть множество

$$\left(-\infty; \frac{-5-\sqrt{15}}{2}\right)\cup\left(\frac{-5+\sqrt{15}}{2}; +\infty\right).$$

Решение второго неравенства есть множество $\left(\frac{3-\sqrt{17}}{2}; \frac{3+\sqrt{17}}{2}\right)$.

Сравним числа $\frac{3-\sqrt{17}}{2}$ и $\frac{-5+\sqrt{15}}{2}$.

$$\frac{3-\sqrt{17}}{2} \vee \frac{-5+\sqrt{15}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3-\sqrt{17} \vee -5+\sqrt{15} \Leftrightarrow 8-\sqrt{17} \vee \sqrt{15} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (8-\sqrt{17})^2 \vee 15 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 81-16\sqrt{17} \vee 15 \Leftrightarrow 66 \vee 16\sqrt{17} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 33 \vee 8\sqrt{17} \Leftrightarrow 1089 > 1088.$$

Следовательно $\frac{3-\sqrt{17}}{2} > \frac{-5+\sqrt{15}}{2}$.

Ответ: $\left(\frac{3-\sqrt{17}}{2}; \frac{3+\sqrt{17}}{2}\right)$.

Пример 25. *Найти область определения функции*

$$y=\log_3\left(2^{\log_{x-3}0,5}-1\right)+\frac{1}{\log_3(2x-6)}.$$

Решение. Область определения данной функции задается системой неравенств

$$\begin{cases} x-3>0, \\ x-3\neq 1, \\ 2x-6\neq 1, \\ 2^{\log_{x-3}0,5}-1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>3, \\ x\neq 4, \\ x\neq 3,5, \\ \log_{x-3}0,5>0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x>3, \\ x\neq 3,5, \\ x\neq 4, \\ x-3<1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3<x<3,5, \\ 3,5<x<4. \end{array}\right.$$

Ответ: $(3;3,5)\cup(3,5;4)$.

Пример 26. *Найти область определения выражения* $\log_{2,5-x}\left(10-3x-x^2\right)$.

Решение. Из определения логарифма получаем систему неравенств

$$\begin{cases} 10-3x-x^2>0, \\ 2,5-x>0, \\ 2,5-x\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+3x-10<0, \\ x<2,5, \\ x\neq 1,5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+5)(x-2)<0, \\ x<2,5, \\ x\neq 1,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5<x<2, \\ x<2,5, \\ x\neq 1,5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -5 < x < 1{,}5, \\ 1{,}5 < x < 2. \end{array}\right.$$

Объединение промежутков $(-5;1{,}5)$ и $(1{,}5;2)$ составляют область определения данного выражения.

Ответ: $(-5;1{,}5)\cup(1{,}5;2)$.

Тренировочные упражнения

Найдите область определения функций:

41. $y=\sqrt{1-\log_8(x^2-4x+3)}$.

42. $y=\sqrt{\log^2_{\frac{1}{2}}(x-3)-1}$.

43. $y=\sqrt{\log_{\frac{1}{4}}\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^2-1}$.

44. $y=\sqrt[4]{2-\lg|x-2|}$.

45. $y=\log_3\left(\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2-\dfrac{3x}{2}\right)\right)$.

46. $y=\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}\log_3\dfrac{x+1}{x-1}}$.

47. $y=\sqrt{\sin x-0{,}5}+\log_3(25-x^2)$.

3. Решение показательных и логарифмических неравенств

При решении показательных, логарифмических и смешанных неравенств в основном достаточно использования стандартных методов решения неравенств. К таковым методам можно отнести:

- метод равносильных переходов;
- решение неравенства на промежутках;
- метод замены;
- обобщенный метод интервалов.

Более подробно различные методы решения неравенств рассмотрены в пособии [4].

3.1. Показательные неравенства

Простейшее показательное неравенство имеет вид

$$a^x \vee b,$$

где $a>0, a\neq 1$, и символ $\vee$ заменяет один из знаков неравенств: $>, <, \geq, \leq$.

При $a>1$ решение соответствующих неравенств записывается следующим образом:

$a^x \geq b \Leftrightarrow x\geq \log_a b$ при $b>0$ и $x\in\mathbf{R}$ при $b\leq 0$;

$a^x > b \Leftrightarrow x> \log_a b$ при $b>0$ и $x\in\mathbf{R}$ при $b\leq 0$;

$a^x \leq b \Leftrightarrow x\leq \log_a b$ при $b>0$ и $x\in\varnothing$ при $b\leq 0$;

$a^x < b \Leftrightarrow x< \log_a b$ при $b>0$ и $x\in\varnothing$ при $b\leq 0$.

При $0<a<1$ решение соответствующих неравенств записывается следующим образом:

$a^x \geq b \Leftrightarrow x\leq \log_a b$ при $b>0$ и $x\in\mathbf{R}$ при $b\leq 0$;

$a^x > b \Leftrightarrow x< \log_a b$ при $b>0$ и $x\in\mathbf{R}$ при $b\leq 0$;

$a^x \leq b \Leftrightarrow x\geq \log_a b$ при $b>0$ и $x\in\varnothing$ при $b\leq 0$;

$a^x < b \Leftrightarrow x> \log_a b$ при $b>0$ и $x\in\varnothing$ при $b\leq 0$.

К числу простейших показательных неравенств относят неравенства вида $a^{f(x)} \geq a^{g(x)}$ (или $a^{f(x)} > a^{g(x)}$), где $a > 0$, $a \neq 1$. Для их решения используется следующая стандартная схема:

- Если число $a > 1$, то

$$a^{f(x)} \geq a^{g(x)} \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \geq g(x).$$

- Если число $0 < a < 1$, то

$$a^{f(x)} \geq a^{g(x)} \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \leq g(x).$$

Замечание. В случае строго неравенства в схеме знаки нестрогих неравенств $\geq$ и $\leq$ заменяются на знаки $>$ и $<$ соответственно.

Пример 27. *Решить неравенство*

$$\sqrt{2}^{2x} \geq 2^{\sqrt{x+2}}.$$

Решение. Так как $\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$, то неравенство преобразуется к виду

$$2^x \geq 2^{\sqrt{x+2}},$$

которое равносильно неравенству

$$x \geq \sqrt{x+2} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0, \\ x+2 \geq 0, \\ x^2 \geq x+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0, \\ x \geq -2, \\ x^2 - x - 2 \geq 0. \end{cases}$$

Так как

$$x^2 - x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \leq -1, \\ x \geq 2, \end{array} \right.$$

то решением системы является множество $[2; +\infty)$.

Ответ: $[2; +\infty)$.

Пример 28. *Решить неравенство*

$$4 \cdot 3^{x+2} - 2 \cdot 5^{x+2} \leq 5^{x+3} - 3^{x+3}.$$

Решение. Приведем данное неравенство к следующему виду

$$4 \cdot 3^{x+2} + 3^{x+3} \leq 5^{x+3} + 2 \cdot 5^{x+2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3^{x+2}(4+3) \leq 5^{x+2}(5+2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3^{x+2} \leq 5^{x+2} \Leftrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^{x+2} \leq 1 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^{x+2} \leq \left(\frac{3}{5}\right)^0.$$

Учитывая свойство строго убывающей функции $y = \left(\frac{3}{5}\right)^t$, получаем $x + 2 \geq 0$ и $x \geq -2$.

Ответ: $[-2; +\infty)$.

При решении показательного неравенства вида $f(a^x) \vee 0$ используется замена $a^x = t$, где $t > 0$, в результате которой неравенство приводится к виду $f(t) \vee 0$.

Пример 29. *Решить неравенство*

$$3 \cdot 2^{2x+1} + 5 \cdot 6^x > 2 \cdot 3^{2x+1}.$$

Решение (сведение к алгебраическому неравенству). Запишем неравенство в виде

$$6 \cdot 2^{2x} + 5 \cdot 2^x \cdot 3^x - 6 \cdot 3^{2x} > 0.$$

Полученное неравенство имеет вид

$$t \cdot a^{2f(x)} + p \cdot a^{f(x)} \cdot b^{g(x)} + q \cdot b^{2g(x)} = 0,$$

где t, p, q – фиксированные действительные числа. Общий метод решения неравенств такого вида состоит в делении на выражение $a^{2f(x)} > 0$ (или на $a^{f(x)} \cdot b^{g(x)} > 0$, или на $b^{2g(x)} > 0$) и последующей замене переменной.

Разделим обе части исходного неравенства на $3^{2x} > 0$

$$6 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{2x} + 5 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x - 6 > 0.$$

Положим $\left(\frac{2}{3}\right)^x = t$, где $t > 0$. В итоге получим квадратичное неравенство

$$6t^2 + 5t - 6 > 0 \Leftrightarrow 6\left(t - \frac{2}{3}\right)\left(t + \frac{3}{2}\right) > 0.$$

Отсюда с учетом условия $t > 0$ получаем $t > \frac{2}{3}$.

Выполняя обратную замену, получим неравенство $\left(\frac{2}{3}\right)^x > \frac{2}{3}$, решение которого есть множество $(-\infty; 1)$.

Ответ: $(-\infty; 1)$.

Пример 30. *Решить неравенство*

$$5^{2x^2-6}-5^{(x+2)(x-1)}-24\cdot 5^{2(x+2)}\ge 0.$$

Решение. Перепишем неравенство в виде

$$5^{2x^2-6}-5^{x^2+x-2}-24\cdot 5^{2x+4}\le 0.$$

Учитывая, что $5^{2x+4}>0$ при любом значении x, разделим обе части неравенства на 5^{2x+4}:

$$5^{2x^2-2x-10}-5^{x^2-x-6}-24\le 0.$$

Пусть $5^{x^2-x-5}=t$, где $t>0$. Тогда получим квадратичное неравенство

$$t^2-\frac{1}{5}t-24\le 0\Leftrightarrow 5t^2-t-120\le 0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 5(t-5)(t+4{,}8)\le 0.$$

Учитывая, что $t>0$, получаем $0<t\le 5$.

Переходя к переменной x, получим неравенство $0<5^{x^2-x-5}\le 5$. Неравенство $0<5^{x^2-x-5}$ справедливо при всех x, а неравенство $5^{x^2-x-5}\le 5\Leftrightarrow x^2-x-5\le 1$.

Решая неравенство $x^2-x-6\le 0$, получим $-2\le x\le 3$.

Ответ: $[-2;\,3]$.

Пример 31. (**МПУ**). *Решить неравенство*

$$\frac{2x^2-11x+15}{2^x-6}<0.$$

Решение. Для решения данного неравенства воспользуемся методом интервалов.

1. Пусть $f(x)=\dfrac{2x^2-11x+15}{2^x-6}$.

2. $D(f)=(-\infty;\log_2 6)\cup(\log_2 6;+\infty)$.

3. Найдем нули функции $f(x)$.

$$\frac{2x^2-11x+15}{2^x-6}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2{,}5,\\ x=3.\end{array}\right.$$

4. Сравним число $\log_2 6$ с числами 2,5 и 3, и затем определим (рис. 2) промежутки знакопостоянства функции $f(x)$:

$$\log_2 6<\log_2 8=3$$

и так как справедлива цепочка сравнений

$\log_2 6\vee 2{,}5\Leftrightarrow\log_2 6\vee\log_2 2^{2{,}5}\Leftrightarrow 6\vee 2^{2{,}5}\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 6^2\vee 2^5\Leftrightarrow 36>25$, то $\log_2 6>2{,}5$.

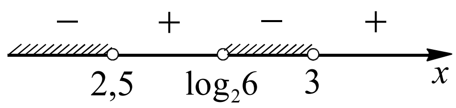

Рис. 2

Ответ: $(-\infty;2{,}5)\cup(\log_2 6;3)$.

Тренировочные упражнения

Решите неравенство:

48. $9\cdot 3^{2x+2}+3\cdot 3^{2x+1}-9^x\le 89$.

49. $3^{1+x}\cdot 2^{1-x}+3^x\cdot 2^{-x}<10{,}5$.

50. (**МИФИ**). $\dfrac{7^x-30}{7^{x-1}+1}\le -14$.

51. $3^{x-1}\ge\dfrac{2-3^x}{3^x-4}$.

52. (**МИЭМ**). $\dfrac{3^x-25}{x+1}\le\dfrac{3^x-25}{x-3}$.

53. (**МГАП**). $3\cdot 49^x-16\cdot 21^x+21\cdot 9^x<0$.

54. (**МГАП**). $5\cdot 9^x-18\cdot 15^x+9\cdot 25^x>0$.

55. $16^x-2\cdot 12^x\le 3^{2x+1}$.

56. $7^{2x}-33\cdot\left(\dfrac{7}{5}\right)^x-14\cdot 5^{1-2x}\le 0$.

57. (**МГАП**) $4^{x^2-x}-10\cdot 2^{x^2}+2^{2x+4}\ge 0$.

58. $2^{2x^2-6x+3}+6^{x^2-3x+1}-3^{2x^2-6x+3}\ge 0$.

59. (**МГАП**). $6^{x+2}\ge 4\cdot 7^{|x+1|}$.

60. $3^{x+2}\cdot 2^{1-2x}\le 20$.

61. $3^{2x-1}<11^{3-x}$.

62. $\left(\dfrac{1}{3}\right)^x(x+2)^2>(2+x)^2$.

63. $x^2\cdot 2^{x+2}-12x^2\cdot 3^x+3^{x+1}>2^x$.

64. $\left|\left|3^x+4x-9\right|-8\right|\le 3^x-4x-1$.

3.2. Логарифмические неравенства

Простейшее логарифмическое неравенство имеет вид

$$\log_a x\vee b,$$

где $a>0, a\ne 1$, и символ $\vee$ заменяет один из знаков неравенств: $>,<,\ge,\le$.

При $a>1$ решение соответствующих неравенств записывается следующим образом:

$\log_a x \ge b \Leftrightarrow x \ge a^b$;

$\log_a x > b \Leftrightarrow x > a^b$;

$\log_a x \le b \Leftrightarrow 0 < x \le a^b$;

$\log_a x < b \Leftrightarrow 0 < x < a^b$.

При $0<a<1$ решение соответствующих неравенств записывается следующим образом:

$\log_a x \ge b \Leftrightarrow 0 < x \le a^b$;

$\log_a x > b \Leftrightarrow 0 < x < a^b$;

$\log_a x \le b \Leftrightarrow x \ge a^b$;

$\log_a x < b \Leftrightarrow x > a^b$.

К числу простейших относят неравенства вида $\log_a f(x) \ge \log_a g(x)$ (или $\log_a f(x) > \log_a g(x)$), где $a>0, a\ne 1$. Для их решения используется следующая стандартная схема:

- Если число $a>1$, то

$$\log_a f(x) \ge \log_a g(x) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} f(x) \ge g(x), \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

- Если число $0<a<1$, то

$$\log_a f(x) \ge \log_a g(x) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} f(x) \le g(x), \\ f(x) > 0. \end{cases}$$

Замечание. В случае строго неравенства в схеме знаки нестрогих неравенств $\ge$ и $\le$ заменяются на знаки $>$ и $<$ соответственно.

Пример 32. *Решить неравенство*

$$\log_{0,5}(x^2+x-6) \ge \log_{0,5}(x+4).$$

Решение. Так как основание 0,5 логарифмов, стоящих в обеих частях неравенства, удовлетворяют условию $0<0,5<1$, то, получаем, что данное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} x^2+x-6 \le x+4, \\ x^2+x-6>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-\sqrt{10})(x+\sqrt{10}) \le 0, \\ (x-2)(x+3)>0. \end{cases}$$

На рис. 3 представлена графическая интерпретация получения решения последней системы неравенств.

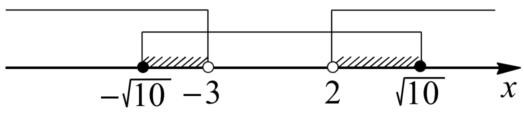

Рис. 3

***Ответ*:** $[-\sqrt{10};-3)\cup(2;\sqrt{10}]$.

Обратим внимание на правильное использование формул при выполнении равносильных преобразований.

Рассмотрим следующие формулы:

$$\log_a(f(x)\cdot g(x)) = \log_a f(x) + \log_a g(x) \quad (1)$$

и

$$\log_a \frac{f(x)}{g(x)} = \log_a f(x) - \log_a g(x), \quad (2)$$

где $a>0, a\ne 1$, $f(x)>0$ и $g(x)>0$.

Заметим, что равенства (1) и (2) в общем случае не являются тождествами, поскольку области определения левой и правой частей равенства могут не совпадать. Так в левой части равенств (1) и (2) выражение будет определено при таких значениях x, когда и $f(x)<0$ и $g(x)<0$. Правая часть при таких значениях x не имеет смысла.

Формулы (1) и (2) используются как для преобразования логарифма произведения (частного) в сумму (разность) логарифмов соответственно, так и в обратную сторону.

В общем случае переход слева направо может привести к потере решений. Если даны выражения $\log_a(f(x)\cdot g(x))$ или $\log_a \frac{f(x)}{g(x)}$ и есть желание преобразовать их в сумму или разность логарифмов, равносильный переход выглядит так

$$\log_a(f(x)\cdot g(x)) = \log_a |f(x)| + \log_a |g(x)|$$

и

$$\log_a \frac{f(x)}{g(x)} = \log_a |f(x)| - \log_a |g(x)|.$$

В общем случае переход справа налево в формулах (1) и (2) может привести к приобретению посторонних решений. Однако эти посторонние решения могут быть исключены, как не входящие в область определения переменной исходного выражения.

Пример 33 (ЕГЭ-2011). *Решить неравенство*

$$11\log_9(x^2-12x+27)\le 12+\log_9\frac{(x-9)^{11}}{x-3}.$$

Решение. Значения x, при которых определены обе части неравенства, задаются условиями

$$\begin{cases} x^2-12x+27>0, \\ \dfrac{(x-9)^{11}}{x-3}>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-3)(x-9)>0, \\ \dfrac{(x-9)^{11}}{x-3}>0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<3, \\ x>9. \end{array}\right.$$

Область определения данного неравенства – есть множество $(-\infty;3)\cup(9;+\infty)$. Для таких значений x из этого множества исходное неравенство приводится к виду:

$$\log_9|(x-3)^{11}|+\log_9|(x-9)^{11}|\le$$

$$\le 12+\log_9|(x-9)^{11}|-\log_9|x-3|\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_9|(x-3)^{11}|+\log_9|x-3|\le 12\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_9(x-3)^{12}\le 12\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-3)^{12}\le 9^{12}\Leftrightarrow\ |x-3|\le 9\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -6\le x\le 12.$$

Учитывая, что значения $x\in(-\infty;3)\cup$ $\cup(9;+\infty)$, получим ответ $[-6;3)\cup(9;12]$.

Ответ: $[-6;3)\cup(9;12]$.

Рассмотрим неравенство вида

$$\log_{h(x)} f(x)\le\log_{h(x)} g(x).$$

Данное неравенство равносильно совокупности двух систем:

$$(1)\ \begin{cases} h(x)>1, \\ 0<f(x)\le g(x), \end{cases} \text{ и } (2)\ \begin{cases} 0<h(x)<1, \\ 0<g(x)\le f(x). \end{cases}$$

Замечание. При решении строгого неравенства $\log_{h(x)} f(x)<\log_{h(x)} g(x)$ в системах знаки нестрогих неравенств заменяются строгими.

Пример 34. *Решить неравенство*

$$\log_{x+1}(x^3+3x^2+2x)<2.$$

Решение. Так как

$$x^3+3x^2+2x=x(x+1)(x+2),$$

то

$$\log_{x+1}(x^3+3x^2+2x)=$$

$$=\log_{x+1}x(x+2)+\log_{x+1}(x+1)=$$

$$=1+\log_{x+1}(x^2+2x).$$

Отметим, что в данном случае левая и правая части равенства определены на одном и том же множестве. Таким образом, имеем неравенство

$$\log_{x+1}(x^2+2x)<1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_{x+1}(x^2+2x)<\log_{x+1}(x+1).\ (*)$$

Так как основание логарифма в этом неравенстве может быть как больше, так и меньше единицы, то рассмотрим два случая.

1-*й случай.* $0<x+1<1$, то есть $-1<x<0$. В этом случае неравенство (*) равносильно неравенству

$$x^2+2x>x+1\Leftrightarrow x^2+x-1>0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<\dfrac{-1-\sqrt5}{2}, \\ x>\dfrac{-1+\sqrt5}{2}. \end{array}\right.$$

Поскольку $\dfrac{-1-\sqrt5}{2}<-1$, а $\dfrac{-1+\sqrt5}{2}>0$, то полученное множество не имеет общих точек с промежутком $(-1;0)$ и, следовательно, при $x\in(-1;0)$ неравенство (*) решений не имеет.

2-*й случай.* $x+1>1$, то есть $x>0$. В этом случае неравенство (*) равносильно неравенству

$$x^2+2x<x+1\Leftrightarrow \frac{-1-\sqrt5}{2}<x<\frac{-1+\sqrt5}{2}.$$

Учитывая условие $x>0$, получим, что решением неравенства (*) является промежуток $\left(0;\dfrac{\sqrt5-1}{2}\right)$.

Ответ: $\left(0;\dfrac{\sqrt5-1}{2}\right)$.

Тренировочные упражнения

Решите неравенство:

65. (**МПГУ**). $\log_3(x^2-x)\ge\log_3(3x+2)$.

66. (**МГУ**). $2\ln\dfrac{1}{3x-2}+\ln(5-2x)\ge 0$.

67. (ЕГЭ 2011). $\dfrac{2\log_3(x^2-4x)}{\log_3 x^2}\le 1$.

68. (**МИОО, май 2010**).

$$\log_{\frac{1}{3}}(x^2-3x-1)+\log_{\frac{1}{3}}(2x^2-3x-2)\le$$
$$\le\log_{\frac{1}{3}}(x^2-2x-1)^2+\log_3 4-2.$$

69.
$$\frac{\log_5(x^2-4x-11)^2-\log_{11}(x^2-4x-11)^3}{2-5x-3x^2}\ge 0.$$

70. (**ЕГЭ 2010**).
$$\frac{\log_4(2-x)-\log_{14}(2-x)}{\log_{14}x-\log_{49}x}\le\log_4 49.$$

71. $\log_{0,1}\log_2\dfrac{x^2+1}{|x-1|}<0.$

72. (**МИОО 2010**).
$$\frac{\log_{2x-1}\left(\log_2(x^2-2x)\right)}{\log_{2x-1}(x^2+6x+10)}\le 0.$$

73. (МИОО, 2011).
$$\frac{\log^2_{2x-3}\dfrac{1}{3x-5}+\log_{2x-3}(9x^2-30x+25)+7}{2\cdot\log_{2x-3}(6x^2-19x+15)-1}\le 3.$$

74. (**ЕГЭ 2010**).
$$\log_{(x+2)^2}\left(x(x+1)(x+3)(x+4)\right)>1.$$

3.3. Смешанные неравенства

Пример 35. *Решить неравенство*
$$(0,5)^{\log_3\log_{1/5}\left(x^2-4/5\right)}>1.$$

Решение. Так как функция $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^t$ убывающая и $1=\left(\dfrac{1}{2}\right)^0$, то получим

$$(0,5)^{\log_3\log_{1/5}\left(x^2-\frac{4}{5}\right)}>1\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\log_3\log_{1/5}\left(x^2-\frac{4}{5}\right)<0.$$

Функция $y=\log_3 t$ возрастающая, с областью определения $t>0$. С учетом того, что $0=\log_3 1$, последнее неравенство равносильно системе

$$\begin{cases}\log_{\frac{1}{5}}\left(x^2-\dfrac{4}{5}\right)<1,\\ \log_{\frac{1}{5}}\left(x^2-\dfrac{4}{5}\right)>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\log_{\frac{1}{5}}\left(x^2-\dfrac{4}{5}\right)<\log_{\frac{1}{5}}\dfrac{1}{5},\\ \log_{\frac{1}{5}}\left(x^2-\dfrac{4}{5}\right)>\log_{\frac{1}{5}}1\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-\dfrac{4}{5}>\dfrac{1}{5},\\ x^2-\dfrac{4}{5}>0,\\ x^2-\dfrac{4}{5}<1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2>1,\\ x^2<\dfrac{9}{5}.\end{cases}$$

Далее, $x^2>1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x<-1,\\ x>1.\end{array}\right.$ и $x^2<\dfrac{9}{5}\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow-\dfrac{3}{\sqrt5}<x<\dfrac{3}{\sqrt5}$. Учитывая, что $\sqrt5<3$ и, значит, $\dfrac{3}{\sqrt5}>1$, а $-\dfrac{3}{\sqrt5}<-1$, запишем решение исходного неравенства $\left(-\dfrac{3}{\sqrt5};-1\right)\cup\left(1;\dfrac{3}{\sqrt5}\right)$.

Ответ: $\left(-\dfrac{3}{\sqrt5};-1\right)\cup\left(1;\dfrac{3}{\sqrt5}\right)$.

Пример 36. (ЕГЭ 2010). *Решить неравенство*

$$\log_5\left(\left(7^{-x^2}-5\right)\left(7^{-x^2+16}-1\right)\right)+\log_5\frac{7^{-x^2}-5}{7^{-x^2+16}-1}>$$
$$>\log_5\left(7^{2-x^2}-1\right)^2.$$

Решение. В соответствии с определением логарифма, входящие в неравенство выражения имеют смысл при выполнении условий:

$$\begin{cases}\left(7^{-x^2}-5\right)\left(7^{-x^2+16}-1\right)>0,\\ 7^{2-x^2}-1\ne 0.\end{cases}$$

Сделаем замену $7^{-x^2}=t$. Так как неравенство $-x^2\le 0$ выполняется при всех x, то по свойству степени с основанием больше единицы получаем $0<7^{-x^2}\le 7^0=1$. Отсюда $0<t\le 1$. С учетом последнего неравенства, запишем полученную выше систему

$$\begin{cases}(t-5)\left(7^{16}t-1\right)>0,\\ 7^2t-1\ne 0,\\ 0<t\le 1\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad 0<t<7^{-16}.$$

Исходное неравенство с переменной t будет иметь вид

$$\log_5\left((t-5)\left(7^{16}t-1\right)\right)+\log_5\frac{t-5}{7^{16}t-1}>$$
$$>\log_5(49t-1)^2,\ \text{где}\ 0<t<7^{-16}.$$

Используя свойство логарифма (при допустимых значениях переменной сумма логарифмов с одинаковым основанием равна логарифму произведения), получим

$$\log_5(t-5)^2>\log_5\left(7^2t-1\right)^2\quad\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\quad (t-5)^2>(49t-1)^2,$$

так как $(t-5)^2>0$ и $(49t-1)^2>0$ при $0<t\le 7^{-16}$.

Решим последнее неравенство:

$$(t-5)^2>(49t-1)^2\quad\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\quad (t-5)^2-(49t-1)^2>0\quad\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\left((t-5)-(49t-1)\right)\left((t-5)+(49t-1)\right)>0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\ (48t+4)(50t-6)<0\ \Leftrightarrow\ -\frac{1}{12}<t<\frac{3}{25}.$$

С учетом ограничения на t получаем $0<t<7^{-16}$.

Выполнив обратную замену, имеем $7^{-x^2}<7^{-16}$. Отсюда

$$x^2>16\quad\Leftrightarrow\quad\left[\begin{array}{l}x<-4,\\ x>4.\end{array}\right.$$

Ответ. $(-\infty;-4)\cup(4;+\infty)$.

Пример 37. *Решить неравенство*

$$7^{\log_7^2 x}+x^{\log_7 x}\ge 2\sqrt[4]{7}.$$

Решение. Заметим, что выражения, входящие в неравенство, определены при всех $x>0$, и для любого $x>0$ справедливо тождество $x=7^{\log_7 x}$.

Следовательно, неравенство можем записать в следующем виде.

$$7^{\log_7^2 x}+\left(7^{\log_7 x}\right)^{\log_7 x}\ge 2\sqrt[4]{7}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\quad 2\cdot 7^{\log_7^2 x}\ge 2\sqrt[4]{7}\quad\Leftrightarrow\quad 7^{\log_7^2 x}\ge 7^{\frac14}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\quad \log_7^2 x\ge\frac14\quad\Leftrightarrow\quad |\log_7 x|\ge\frac12\quad\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\quad\left[\begin{array}{l}\log_7 x\ge\frac12,\\ \log_7 x\le -\frac12\end{array}\right.\quad\Leftrightarrow\quad\left[\begin{array}{l}x\ge\sqrt7,\\ 0<x\le\frac{1}{\sqrt7}.\end{array}\right.$$

Ответ: $\left(0;\frac{1}{\sqrt7}\right]\cup[\sqrt7;+\infty)$.

Тренировочные упражнения

Решите неравенство:

75. $\log_2(2^x+1)\cdot\log_{1/2}(2^{x+1}+2)>-2.$

76. (**ЕГЭ 2010**).

$$\log_5\left((3^{-x^2}-5)(3^{-x^2+9}-1)\right)+\log_5\frac{3^{-x^2}-5}{3^{-x^2+9}-1}>$$
$$>\log_5(3^{7-x^2}-4)^2.$$

77. (ЕГЭ 2010).

$$\frac{2\log_{2x-1}|x|}{\log_{2x-1}(x+7)}\le\frac{\log_3(x+12)}{\log_3(x+7)}.$$

78. (**ЕГЭ 2010**).

$$\frac{\log_{3x+4}27}{\log_{3x+4}(-81x)}\le\frac{1}{\log_3\log_{\frac13}3^x}.$$

79. (МИОО, 2011).

$$(x+1)\log_3 6+\log_3\left(2^x-\frac16\right)\le x-1.$$

80. $x\ge\log_2\left(101\cdot 10^x-10^{2+2x}\right)-$
$$-\log_5\left(101\cdot 2^x-5^{2+x}\cdot 2^{2+2x}\right).$$

81. (**МИОО, 2010**).

$$7^{-|x-3|}\cdot\log_2(6x-x^2-7)\ge 1.$$

4. Системы неравенств

Для решения системы неравенств с одной переменной к каждому неравенству применяют те же методы, которые были рассмотрены выше.

Пример 38. **(МИОО).** *Решить систему неравенств*

$$\begin{cases} 8^x + 8 \ge 4^{x+1} + 2^{x+1}, \\ \log_{x-1} 7 > 2. \end{cases}$$

Решение. Решим первое неравенство системы

$$8^x - 4^{x+1} + 8 - 2^{x+1} \ge 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4^x(2^x - 4) - 2(2^x - 4) \ge 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (4^x - 2)(2^x - 4) \ge 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (4^x - 4^{0,5})(2^x - 2^2) \ge 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x - 0{,}5)(x - 2) \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} & x \le 0{,}5 \\ & x \ge 2. \end{aligned}\right.$$

Второе неравенство системы равносильно совокупности двух систем неравенств.

$$\left[\begin{aligned} & \begin{cases} x - 1 > 1 \\ (x-1)^2 < 7 \end{cases} \\ & \begin{cases} 0 < x - 1 < 1 \\ (x-1)^2 > 7 \end{cases} \end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} & \begin{cases} x > 2 \\ 1 - \sqrt{7} < x < 1 + \sqrt{7} \end{cases} \\ & \begin{cases} 1 < x < 2 \\ \left[\begin{aligned} & x < 1 - \sqrt{7} \\ & x > 1 + \sqrt{7} \end{aligned}\right. \end{cases} \end{aligned}\right. \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\ 2 < x < 1 + \sqrt{7},$$

так как $1 - \sqrt{7} < 1$ и $2 < 1 + \sqrt{7}$ (докажите самостоятельно).

Решением исходной системы является множество $(2; 1 + \sqrt{7})$.

Ответ: $(2; 1 + \sqrt{7})$.

Пример 39. **(МИОО).** *Решить систему неравенств*

$$\begin{cases} \sqrt{x+2} + \log_5(x+3) \ge 0, \\ 9^{x+1} - 28 \cdot 3^x + 3 \ge 0. \end{cases}$$

Решение. Решение системы начнем со второго неравенства.

Пусть $3^x = t$, тогда получим квадратное неравенство $9t^2 - 28t + 3 \ge 0$, имеющее решение $t \le \frac{1}{9}$ или $t \ge 3$. Отсюда имеем $3^x \le \frac{1}{9}$ или $3^x \ge 3$ и решение второго неравенства системы: $(-\infty; -2] \cup [1; +\infty)$.

Для решения первого неравенства системы рассмотрим функцию

$$f(x) = \sqrt{x+2} + \log_5(x+3),$$

которая является взрастающей на промежутке $[-2; +\infty)$, как сумма двух возрастающих функций.

Так как $f(-2) = 0$, то $f(x) \ge 0$ для всех значений $x \in [-2; +\infty)$. Следовательно, решением первого неравенства является промежуток $[-2; +\infty)$.

Общим решением двух неравенств системы является множество $\{-2\} \cup [1; +\infty)$.

Ответ: $\{-2\} \cup [1; +\infty)$

Пример 40. *Решить систему неравенств*

$$\begin{cases} \log_{x^2 + \frac{1}{4}}\left(\frac{x^2}{2} + \frac{x}{4} + \frac{1}{2}\right) \ge 1, \\ x^2 - 3x - 2 > 0. \end{cases}$$

Решение. Рассмотрим первое неравенство. Возможны два случая.

1. Если $0 < x^2 + \frac{1}{4} < 1$, т.е. $-\frac{\sqrt{3}}{2} < x < \frac{\sqrt{3}}{2}$, то в этом случае исходное неравенство равносильно системе неравенств:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{2} + \frac{x}{4} + \frac{1}{2} > 0, \\ \frac{x^2}{2} + \frac{x}{4} + \frac{1}{2} \le x^2 + \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + x + 2 > 0, \\ 2x^2 - x - 1 \ge 0. \end{cases}$$

Решением этой системы неравенств является множество $(-\infty; -0{,}5] \cup [1; +\infty)$.

С учетом полученного ранее условия находим все значения $x \in \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}\right]$.

2. Если $x^2 + \frac{1}{4} > 1$, т.е. $|x| > \frac{\sqrt{3}}{2}$, то в этом случае исходное неравенство равносильно неравенству:

$$\frac{x^2}{2} + \frac{x}{4} + \frac{1}{2} \ge x^2 + \frac{1}{4}.$$

Отсюда находим все значения $x \in [-0{,}5;\,1]$. С учетом полученного ранее условия получаем значения $x \in \left(\frac{\sqrt{3}}{2};\,1\right]$.

Объединим полученные решения:

$$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2}\right] \cup \left(\frac{\sqrt{3}}{2};\,1\right].$$

Рассмотрим второе неравенство. Решением неравенства является множество:

$$\left(-\infty;\,\frac{3-\sqrt{17}}{2}\right) \cup \left(\frac{3+\sqrt{17}}{2};\,+\infty\right).$$

Чтобы найти решения исходной системы неравенств, заметим, что:

$$\frac{3+\sqrt{17}}{2} > \frac{3+\sqrt{16}}{2} = \frac{7}{2} > 1;$$

$$\frac{3-\sqrt{17}}{2} < \frac{3-\sqrt{16}}{2} = -\frac{1}{2}.$$

Сравним числа $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ и $\frac{3-\sqrt{17}}{2}$.

$$-\frac{\sqrt{3}}{2} \vee \frac{3-\sqrt{17}}{2} \Leftrightarrow -\sqrt{3} \vee 3-\sqrt{17} \Leftrightarrow$$

(прибавим к обеим числам $\sqrt{3}+\sqrt{17}$)

$$\Leftrightarrow \sqrt{17} \vee 3+\sqrt{3} \Leftrightarrow 17 \vee 12+6\sqrt{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5 \vee 6\sqrt{3}.$$

Так как $\sqrt{3} > 1$, то $6\sqrt{3} > 5$ и тогда $-\frac{\sqrt{3}}{2} < \frac{3-\sqrt{17}}{2}$.

Следовательно, решением данной в условии системы является множество:

$$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{3-\sqrt{17}}{2}\right).$$

Ответ: $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{3-\sqrt{17}}{2}\right)$.

Пример 41. *Решить систему неравенств*

$$\begin{cases} \dfrac{2\cdot 81^x + 3^x - 87}{81^x - 3} \ge 2, \\ \log_2^2(x+4) - 4\log_2(x+4) + 3 \le 0. \end{cases}$$

Решение. Рассмотрим первое неравенство. Пусть $3^x = t$, где $t > 0$. Тогда имеем

$$\frac{2\cdot t^4 + t - 87}{t^4 - 3} \ge 2 \Leftrightarrow \frac{2\cdot t^4 + t - 87}{t^4 - 3} - 2 \ge 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{t-81}{t^4-3} \ge 0 \Leftrightarrow \frac{t-81}{(t^2-\sqrt{3})(t^2+\sqrt{3})} \ge 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{t-81}{t^2-\sqrt{3}} \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 < t < \sqrt[4]{3}, \\ t \ge 81. \end{array}\right.$$

Отсюда получаем

$$\left\{\begin{array}{l} 3^x < \sqrt[4]{3}; \\ 3^x \ge 81 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t < \dfrac{1}{4}, \\ t \ge 4. \end{array}\right.$$

Рассмотрим второе неравенство. Пусть $\log_2(x+4) = a$. Тогда имеем

$$a^2 - 4a + 3 \le 0 \Leftrightarrow 1 \le a \le 3.$$

Отсюда получаем $1 \le \log_2(x+4) \le 3$ или $2 \le x+4 \le 8 \Leftrightarrow -2 \le x \le 4$.

В итоге получаем, что решение исходной системы есть множество:

$$\left[-2;\,\frac{1}{4}\right) \cup \{4\}.$$

Ответ: $\left[-2;\,\frac{1}{4}\right) \cup \{4\}$.

Пример 42. *Решить систему неравенств*

$$\begin{cases} 25^x - 2\cdot 5^x \ge 3, \\ \log_{\frac{2}{3}}^2 x + \log_{\frac{2}{3}} x \le 2. \end{cases}$$

Решение. 1. Неравенство $25^x - 2\cdot 5^x \ge 3$ данной системы запишем в виде $(5^x)^2 - 2\cdot 5^x - 3 \ge 0$.

Пусть $5^x = t$, где $t > 0$. Тогда неравенство примет вид: $t^2 - 2t - 3 \ge 0$ или $(t-3)(t+1) \ge 0$. Отсюда с учетом неравенства $t > 0$ получаем $t \ge 3$.

Выполняя обратную замену, имеем

$$5^x \ge 3 \Leftrightarrow 5^x \ge 5^{\log_5 3} \Leftrightarrow x \ge \log_5 3.$$

2. Второе неравенство системы запишем в виде $\log_{\frac{2}{3}}^2 x + \log_{\frac{2}{3}} x - 2 \le 0$.

Пусть $\log_{\frac{2}{3}} x = a$. Тогда неравенство примет вид: $a^2 + a - 2 \le 0$ или

$(a-1)(a+2)\le 0$. Отсюда получаем $-2\le a\le 1$.

Выполняя обратную замену, имеем $-2\le \log_{\frac{2}{3}} x\le 1$. Отсюда с учетом того, что основание логарифмической функции меньше 1, получаем $\frac{2}{3}\le x\le \frac{9}{4}$.

3. Так как $0=\log_5 1<\log_5 3<\log_5 5=1$, то для получения ответа необходимо сравнить числа $\log_5 3$ и $\frac{2}{3}$.

Так как $\frac{2}{3}=\log_5 5^{\frac{2}{3}}=\log_5\sqrt[3]{25}$, а $\log_5 3=\log_5\sqrt[3]{27}$, то из неравенства $\sqrt[3]{27}>\sqrt[3]{25}$ следует $\log_5\sqrt[3]{27}>\log_5\sqrt[3]{25}$ и $\frac{2}{3}<\log_5 3$.

Следовательно, решениями данной системы неравенств являются все значения $x\in\left[\log_5 3;\ \frac{9}{4}\right]$.

Ответ: $\left[\log_5 3;\ \frac{9}{4}\right]$.

Пример 43. *Решить систему неравенств*

$$\begin{cases}\log_{7-x}(x+2)\le \log_{7-x}(3-x),\\ 32\cdot 9^x\le 60\cdot 3^x-7.\end{cases}$$

Решение. 1. Для решения неравенства $\log_{7-x}(x+2)\le\log_{7-x}(3-x)$ системы рассмотрим два случая.

Пусть $7-x>1$, т.е. $x<6$. Тогда рассматриваемое неравенство будет равносильно следующему двойному неравенству $0<x+2\le 3-x$. Отсюда получаем $-2<x\le\frac{1}{2}$ с учетом $x<6$.

Пусть $0<7-x<1$, т.е. $6<x<7$. Тогда рассматриваемое неравенство будет равносильно следующему двойному неравенству $x+2\ge 3-x>0$. Отсюда получаем $\frac{1}{2}\le x<3$, что не удовлетворяет неравенству $6<x<7$. Следовательно, в этом случае решений нет.

Получили, что данное неравенство имеет решение $-2<x\le\frac{1}{2}$.

2. Неравенство $32\cdot 9^x\le 60\cdot 3^x-7$ системы запишем в виде

$$32\cdot(3^x)^2-60\cdot 3^x+7\le 0.$$

Пусть $3^x=t$, где $t>0$. Тогда неравенство примет вид: $32t^2-60t+7\le 0$ или $\left(t-\frac{1}{8}\right)\left(t-\frac{7}{4}\right)\le 0$. Отсюда с учетом неравенства $t>0$ получаем $\frac{1}{8}\le t\le\frac{7}{4}$.

Выполняя обратную замену, имеем $\frac{1}{8}\le 3^x\le\frac{7}{4}$ или $\log_3\frac{1}{8}\le x\le\log_3\frac{7}{4}$.

3. Сравним числа $\log_3\frac{1}{8}$, $\log_3\frac{7}{4}$ и -2, $\frac{1}{2}$.

Так как $0=\log_3 1>\log_3\frac{1}{8}>\log_3\frac{1}{9}=-2$, а $\log_3\frac{7}{4}=\log_3 1{,}75>\log_3\sqrt{3}=\frac{1}{2}$, поскольку $\frac{7}{4}=\sqrt{\frac{49}{16}}>\sqrt{3}$. Следовательно, решение системы неравенств есть множество $\left[\log_3\frac{1}{8};\ \frac{1}{2}\right]$.

Ответ: $\left[\log_3\frac{1}{8};\ \frac{1}{2}\right]$.

Пример 44. *Решить систему неравенств*

$$\begin{cases}\log_{2x-1}\dfrac{x^4+2}{2x+1}\ge 1,\\ 16^x-3\cdot 12^x-4\cdot 9^x<0.\end{cases}$$

Решение. 1. Для решения неравенства $\log_{2x-1}\frac{x^4+2}{2x+1}\ge 1$ системы рассмотрим два случая.

Пусть $2x-1>1$, т.е. $x>1$. Тогда $2x+1>0$ и

$$\log_{2x-1}\frac{x^4+2}{2x+1}\ge 1\Leftrightarrow\frac{x^4+2}{2x+1}\ge 2x-1\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^4+2\ge(2x-1)(2x+1).$$

Из неравенства $x^4-4x^2+3\ge 0$, получаем $\left[\begin{array}{l}0\le x^2\le 1,\\ x^2\ge 3.\end{array}\right.$. С учетом условия $x>1$ имеем $x\ge\sqrt{3}$.

Пусть $0<2x-1<1$, т.е. $0{,}5<x<1$. Тогда $2x+1>0$ и

$$\log_{2x-1}\frac{x^4+2}{2x+1}\ge 1\Leftrightarrow 0<\frac{x^4+2}{2x+1}\le 2x-1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^4-4x^2+3\le 0\Leftrightarrow 1\le x^2\le 3.$$

С учетом условия $0{,}5<x<1$ получаем, что во втором случае решений нет.

Следовательно, решением первого неравенства данной в условии системы является множество $[\sqrt{3};+\infty)$.

2. Неравенство $16^x-3\cdot 12^x-4\cdot 9^x<0$ системы запишем в виде

$$\frac{16^x}{9^x}-3\cdot\frac{12^x}{9^x}-4<0\Leftrightarrow\left(\frac{4}{3}\right)^{2x}-3\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^{x}-4<0.$$

Пусть $\left(\frac{4}{3}\right)^{x}=t$, где $t>0$. Тогда неравенство примет вид: $t^2-3t-4<0$ или $(t-4)(t+1)<0$. Отсюда с учетом неравенства $t>0$ получаем $0<t<4$.

Выполняя обратную замену, имеем $0<\left(\frac{4}{3}\right)^{x}<4$. Отсюда $x<\log_{\frac{4}{3}}4$.

3. Сравним числа $\log_{\frac{4}{3}}4$ и $\sqrt{3}$. Так как

$\log_{\frac{4}{3}}4>\log_{\frac{4}{3}}\frac{16}{9}=2$, то $\log_{\frac{4}{3}}4>\sqrt{3}$.

Следовательно, решение системы неравенств есть множество $\left[\sqrt{3};\log_{\frac{4}{3}}4\right)$.

Ответ: $\left[\sqrt{3};\log_{\frac{4}{3}}4\right)$.

Тренировочные упражнения

Решите систему неравенств:

82. $\begin{cases}9^x-10\cdot 3^x+9<0,\\ \dfrac{2}{x}<2+\dfrac{3}{x-1}.\end{cases}$

83. $\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt[3]{32}}\cdot 8^{3x^2}>2^{x+3},\\ |\sqrt{2}x-1|=\sqrt{2}x-1.\end{cases}$

84. $\begin{cases}3^{x+2}+9^{x+1}-810>0,\\ \log_3^2x+4\log_3x+3\ge 0.\end{cases}$

85. (**МИОО**). $\begin{cases}9^{x+1}+3\ge 28\cdot 3^x,\\ \log_2(x^2-2x)\le 3.\end{cases}$

86. (**МИОО**). $\begin{cases}8\cdot 4^x-65\cdot 2^x+8\le 0,\\ \log_{|x|}^2(x^4)+\log_3(x^2)\le 18.\end{cases}$

87. $\begin{cases}(x^2-8x+12)\sqrt{x^2-10x+21}\ge 0,\\ 4^{x-1}+2^{x-2}-\dfrac{3}{2}\ge 0.\end{cases}$

88. $\begin{cases}\log_2\dfrac{3x-2}{x-1}+3\log_8\dfrac{(x-1)^3}{3x-2}<1,\\ \dfrac{\sqrt{8-2x-x^2}}{2x+9}\ge\dfrac{\sqrt{8-2x-x^2}}{x+10}.\end{cases}$

89. (**МИОО**).

$\begin{cases}\dfrac{3\cdot 64^x+2^x-70}{64^x-2}\ge 3,\\ \log_3^2(x+3)-3\log_3(x+3)+2\le 0.\end{cases}$

90. $\begin{cases}\dfrac{\sqrt{2x^2-5x+2}}{2x^2+6x}\le 0,\\ 9^{\log_{\frac{1}{9}}\log_5x^2}<5^{\log_{\frac{1}{5}}\log_9x^2}.\end{cases}$

91. $\begin{cases}2^{x^2+3x-3}-2^{x^2+3x-5}-96\le 0,\\ \log_{\frac{1}{3}}\dfrac{2x-1}{x+2}>1.\end{cases}$

92. $\begin{cases}\dfrac{2^{x+1}-45}{2^{x-1}-4{,}4}\le 0,\\ \log_2(x-3)<\log_{0,5}\dfrac{1}{6-x}.\end{cases}$

93. $\begin{cases} 2\cdot 3^{2x+4}-245\cdot 3^{x}+3\le 0, \\ \log_2(x^2+4x+5)>2. \end{cases}$

94.

$$\begin{cases} 5\cdot 3^{2x}+15\cdot 5^{2x-1}\ge 8\cdot 15^{x}, \\ \log_2\left(\log_3\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)\right)<\log_{\frac{1}{8}}\left(\log_{\frac{1}{9}}\left(\dfrac{x^2+2x+1}{x^2-2x+1}\right)\right). \end{cases}$$

95. $\begin{cases} \dfrac{(2^x-32)(3^x+27)}{x^2+5x-14}\le 0, \\ \log_{0,1}^2 x-1\le 0. \end{cases}$.

96. $\begin{cases} \left(\dfrac{1}{3}\right)^{x}\ge x+4, \\ \log_2(x^2-4)-3\log_2\dfrac{x+2}{x-2}>2. \end{cases}$.

97. $\begin{cases} \dfrac{2^{4x+2}}{4^{x+1}}>1, \\ 1+\log_3(x-4)\le \log_3(x+21). \end{cases}$

98. $\begin{cases} \dfrac{\log_3(1-2x-x^2)}{\log_{3-\sqrt{5}}(x+1+\sqrt{2})}\ge 0, \\ \dfrac{\log_{0,5}(1-2x)}{\log_2\left(\dfrac{8}{3}x\right)}\le -\dfrac{1}{2}. \end{cases}$

99. $\begin{cases} \dfrac{7^x-30}{7^{x-1}+1}\le -14, \\ \log_3(1-2x)\ge \log_3(5x-2). \end{cases}$

100. $\begin{cases} 2^{x+2}-2^{x+3}-2^{x+4}>5^{x+1}-5^{x+2}, \\ \log_{\frac{1}{\sqrt{5}}}(-x^2+6x+3)\ge -2. \end{cases}$

101. $\begin{cases} 4\cdot 3^{x+2}-2\cdot 5^{x+2}\le 5^{x+3}-3^{x+3}, \\ \lg(x^2-2x-2)\le 0. \end{cases}$

102. $\begin{cases} 5^{2x+1}>5^{x}+4, \\ \log_3(x^2-x)\ge \log_3(3x+2). \end{cases}$

103. $\begin{cases} 2\cdot 3^{2x^2}+4\le 3^{x^2+2}, \\ \log_8(x^2-4x+3)<1. \end{cases}$

104. $\begin{cases} 3^{x}<1+12\cdot 3^{-x}, \\ 2\ln\dfrac{1}{3x-2}+\ln(5-2x)\ge 0. \end{cases}$

105. $\begin{cases} \dfrac{x-2\sqrt{x}-8}{2^x-4}\ge 0, \\ \dfrac{\log_2 x-5}{1-2\log_x 2}\ge 2\log_2 x. \end{cases}$

106. $\begin{cases} \dfrac{2x^2-11x+15}{2^x-6}<0, \\ \dfrac{1}{2}\log_{\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}} x^2\ge \log_{\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}}\sqrt{2x+3}. \end{cases}$

107. $\begin{cases} \left(\dfrac{1}{2}\right)^{\log_{\frac{1}{9}}(2x^2-3x+1)}<1, \\ 2+\dfrac{\log_2^2 x}{1+\log_2 x}>\log_2 x. \end{cases}$

108. $\begin{cases} \dfrac{4^x}{2^x-1}\le \dfrac{2^x+12}{3}, \\ \log_4(3\cdot 4^{x+1}-8)<2x+1. \end{cases}$

109. $\begin{cases} 2^{x}+2^{|x|}\ge 2\sqrt{2}, \\ \log_{0,5}(6|x|-3)\le \log_{0,5}(4-x^2). \end{cases}$

110. $\begin{cases} \dfrac{2^{x+1}-22}{2^x-2}\ge 1, \\ \log_5^2 x+|\log_5 x|\ge 6. \end{cases}$

111. $\begin{cases} \dfrac{1}{4^{\sqrt{x}}-3\cdot 2^{\sqrt{x}}+2}<\dfrac{1}{6}, \\ \log_{\frac{1}{x}}\left(\dfrac{5}{2}x-1\right)\ge -2. \end{cases}$

112. (МИОО). $\begin{cases} 25^{x}-30\cdot 5^{x}+125\ge 0, \\ \log_x(x-1)\cdot\log_x(x+1)\le 0. \end{cases}$

113. (МИОО).

$$\begin{cases} x^2+2^x+36\le 78\cdot\log_3(x+3), \\ 12x+2^x\ge 78\cdot\log_3(x+3). \end{cases}$$

114. (МИОО). $\begin{cases} \log_{\log_x 2x}(5x-2)\ge 0, \\ 15^{x}-9\cdot 5^{x}-3^{x}+9\le 0. \end{cases}$

115. (**МИОО**). $\begin{cases} \log_{\log_x 3x}(4x-1) \ge 0, \\ 21^x - 9\cdot 7^x - 3^x + 9 \le 0. \end{cases}$

116. (**МИОО**). $\begin{cases} 6^x + \left(\dfrac{1}{6}\right)^x > 2, \\ 2^{x^2} \le 4\cdot 2^x. \end{cases}$

117. (**МИОО**). $\begin{cases} 7^x + \left(\dfrac{1}{7}\right)^x > 2, \\ 3^{x^2} \le 9\cdot 3^{-x}. \end{cases}$

118. (**МИОО**).
$$\begin{cases} \log_2(100-x^2) \le 2 + \log_2(x+1), \\ \log_{0,3}(2|x+5| + |x-11| - 30) < 1. \end{cases}$$

119. (**МИОО**).
$$\begin{cases} \log_4(81-x^2) \le 2 + \log_4(x+4), \\ \log_{0,2}(3|x+4| + |x-10| - 38) < 1. \end{cases}$$

120. (**Демовариант 2012**).
$$\begin{cases} 4^x \le 9\cdot 2^x + 22, \\ \log_3(x^2 - x - 2) \le 1 + \log_3 \dfrac{x+1}{x-2}. \end{cases}$$

121. (**МИОО**).
$$\begin{cases} 25^x + 3\cdot 10^x - 4\cdot 4^x > 0, \\ \log_{1-\frac{x^2}{37}}(x^2 - 12|x| + 37) - \log_{1+\frac{x^2}{37}}(x^2 - \\ \qquad -12|x| + 37) \ge 0. \end{cases}$$

122. (**МИОО**).
$$\begin{cases} 16^x + 12^x - 2\cdot 9^x < 0, \\ \log_{1-\frac{x^2}{26}}(x^2 - 10|x| + 26) - \log_{1+\frac{x^2}{26}}(x^2 - \\ \qquad -10|x| + 26) \ge 0. \end{cases}$$

123. (**МИОО**).
$$\begin{cases} x^2 + 6^x + 4 \le 44\cdot \log_5(x+3), \\ 4x + 6^x \ge 44\cdot \log_5(x+3). \end{cases}$$

124. (**МИОО**). $\begin{cases} 4^{x+1} - 17\cdot 2^x + 4 \le 0, \\ \log^2_{|x|} x^2 + \log_2 x^2 \le 6. \end{cases}$

125. (**МИОО**). $\begin{cases} 4\log_9(x+4,5) - 1 \ge 3^{4x^2-9}, \\ 3 - 4\log_9(x+4,5) \ge 3^{9-4x^2}. \end{cases}$

126. (**МИОО**). $\begin{cases} \log_7(x^2-9) \le 1 \\ \dfrac{2x^2 + x - 28}{6^{x-6} + 5^{x-5} - 4} \le 0. \end{cases}$

127. (**МИОО**). $\begin{cases} \log^2_7(x^2 + 4x - 20) \le x - 3 \\ \log^2_7(x^2 + 2x - 14) \le 3 - x. \end{cases}$

128.
$$\begin{cases} 5\cdot 3^{2x^2-3x-1} - 2\cdot 3^{2x^2-3x} + 3^{2x^2-3x-3} \ge -72, \\ \log_{\frac{1}{3}}(x+1) \le \log_3(x-2). \end{cases}$$

129. $\begin{cases} 4^{x^2-x} - 10\cdot 2^{x^2} + 2^{2x+4} \ge 0, \\ \log_{9x} 3x + \log_{3x^2} 9x^2 \le \dfrac{5}{2} \end{cases}$

130.
$$\begin{cases} (2+\sqrt{3})^{\log_2 x} + (2-\sqrt{3})^{\log_2(4x)} \le \dfrac{4}{2+\sqrt{3}}, \\ \log_{\frac{1}{3}}(x^2 - 4x + 3) - 2\log_{\frac{1}{3}}(4-x) \ge 0. \end{cases}$$

131. $\begin{cases} \dfrac{9^{x+0,5} + 1}{3 - 3^{2x}} \le 3^{2x} + 1, \\ \dfrac{\log_3(1 - 2x - x^2)}{\log_{3-\sqrt{5}}(x + 1 + \sqrt{2})} \ge 0 \end{cases}$

132. (**МИОО**).
$$\begin{cases} (9\cdot 9^x - 10\cdot 3^x + 1)\cdot \log_{x+1}|x-3,5| \ge 0, \\ 9^{x+1} + \log_{x+1}|x-3,5| + 1 \ge 10\cdot 3^x. \end{cases}$$

133. (**МИОО**).
$$\begin{cases} 4^{x+1} - 33\cdot 2^x + 8 \le 0, \\ 2\log_2 \dfrac{x-1}{2x+3} + \log_2(2x+3)^2 \ge 2. \end{cases}$$

134. (**МИОО**).
$$\begin{cases} 2^x + 16\cdot 2^{-x} \ge 17, \\ 2\log_9(4x^2+1) \le \log_3(3x^2 + 4x + 1). \end{cases}$$

135. (**МИОО**). $\begin{cases} 4^x - 6\cdot 2^x + 8 \ge 0, \\ \log_3 \dfrac{2x^2 + 3x - 5}{x+1} \le 1. \end{cases}$

136. (**МИОО**). $\begin{cases} 4^{x-3}+2^x\left(\dfrac{x}{8}-2\right)-16x\le 0, \\ 7^x-7^{1-x}+6>0. \end{cases}$

137. (**МИОО**). $\begin{cases} \log_{(x-1)^2}(x^2-4x+4)<0, \\ \log_2(x^2-3x+3)>1. \end{cases}$

138. (**МИОО**).

$$\begin{cases} \log_{5x}x^2+\log_{x^2}5x\le 2, \\ \log_{x-3}^4(x^2-17)+\log_{x^2-17}^2(x-3)-\log_{5x}25>79. \end{cases}$$

139. (**МИОО**).

$$\begin{cases} 7^{x-1}+7^x+7^{x+1}>171, \\ \log_3\dfrac{1}{x}+\log_3(x^2+3x-9)\le \\ \qquad\le\log_3\left(x^2+3x+\dfrac{1}{x}-10\right). \end{cases}$$

140. (**МИОО**).

$$\begin{cases} 9^{x-3}-9^{x-2}+9^{x-1}>511, \\ \log_7\dfrac{3}{x}+\log_7(x^2-7x+11)\le \\ \qquad\le\log_7\left(x^2-7x+\dfrac{3}{x}+10\right). \end{cases}$$

141. (**МИОО**).

$$\begin{cases} 9^{x+1}-244\cdot 3^x+27\le 0, \\ 2\log_2\dfrac{x-1}{10x+11}+\log_2(10x+11)^2\ge 2. \end{cases}$$

142. (**МИОО**).

$$\begin{cases} 4^x-12\cdot 2^x+32\ge 0, \\ \log_x(x-2)\cdot\log_x(x+2)\le 0. \end{cases}$$

143. (**МИОО**). $\begin{cases} 17\cdot\log_{17}(x+14)\ge x^2+8, \\ 17\cdot\log_{17}(x+14)\le 6x-1. \end{cases}$

144. (**МИОО**). $\begin{cases} 2^x+\dfrac{16}{2^x}\ge 10, \\ \log_{x+2}(x-2)\le 0. \end{cases}$

145. (**МИОО**). $\begin{cases} 3\cdot 9^x-28\cdot 3^x+9\le 0, \\ \log_{x^2}(x-1)^2\le 1. \end{cases}$

146. (**МИОО**). $\begin{cases} 13^{x-6}+\ln^2(x-7)\ge 13, \\ 7+\sqrt{13-x}\ge 7^{x-12}. \end{cases}$

147. (**МИОО**). $\begin{cases} \sqrt{x+3}+\log_2(x+5)\ge 0, \\ 8\cdot 4^x-33\cdot 2^x+4\ge 0. \end{cases}$

148. (**МИОО**).

$$\begin{cases} \dfrac{2\cdot 81^x+3^x-87}{81^x-3}\ge 2, \\ \log_2^2(x+4)-5\log_2(x+4)+6\le 0. \end{cases}$$

149. (**МИОО**).

$$\begin{cases} \dfrac{9\cdot 2^x-24}{2^x-4}\ge 2^x+4, \\ \log_2(x+1)\ge\dfrac{\log_2(x+1)}{\log_2(x+1)-1}. \end{cases}$$

150. (**МИОО**). $\begin{cases} 9^x-4\cdot 3^x+3\ge 0, \\ \log_{\frac{2x^2+3x+1}{3x+1}}|x|\le 0. \end{cases}$

151. $\begin{cases} (x-1)\lg 2+\lg(2^{x+1}+1)<\lg(7\cdot 2^x+12), \\ \log_x(x+2)>2. \end{cases}$

152. $\begin{cases} \dfrac{x^2+4}{x^2-16x+64}>0, \\ \lg\sqrt{x+7}>\lg(x-5)-2\lg 2. \end{cases}$

153. $\begin{cases} \dfrac{\sqrt{(x-8)(2-x)}}{\log_{0,3}\left(\dfrac{10}{7}(\log_2 5-1)\right)}\ge 0, \\ 2^{x-3}-31>0. \end{cases}$

154. $\begin{cases} \dfrac{\sqrt{\log_2^2 x-3\log_2 x+2}}{\log_5\left(\dfrac{1}{3}(\log_3 5-1)\right)}\ge 0, \\ x-\sqrt{x}-2\ge 0. \end{cases}$

155. $\begin{cases} \log_{x+3}(x^2-x)<1, \\ \log_{x^2-\frac{3}{2}x}(3-2^x)>0. \end{cases}$

156. $\begin{cases}\log_{3-2x} x<2,\\ \log_x(\log_2(4^x-6))\le 1.\end{cases}$

157. $\begin{cases}3^{\log_3^2 x}+x^{\log_3 x}>2\sqrt[4]{3},\\ \log_2^2 x+6\ge 5\log_2 x.\end{cases}$

158. $\begin{cases}1+\lg x^6\cdot\log_5 x>\log_5 x^2+\lg x^3,\\ \log_{\log_2\left(\frac{x}{2}\right)}(x^2-10x+22)>0.\end{cases}$

159. Найдите все натуральные значения x, удовлетворяющие системе неравенств

$$\begin{cases}\dfrac{x}{x-3}+\dfrac{x-5}{x}<\dfrac{2x}{3-x},\\ \log_{\sqrt{2}}(x-1)<4.\end{cases}$$

160. Найдите все целые значения x, удовлетворяющие системе неравенств

$$\begin{cases}\dfrac{x+8}{x+2}>2,\\ \lg(x-1)<1.\end{cases}$$

Ответы

1. $a<b$. **2.** $a>b$. **3.** $a>b$. **4.** $a<b$. **5.** $a<b$. **6.** $a=b$. **7.** $a<b$. **8.** $a<b$. **9.** $a>b$. **10.** $a>b$. **11.** $a>b$. **12.** $a>b$. **13.** $a<b$. **14.** $a>b$. **15.** $a>b$. **16.** $a>b$. **17.** $a>b$. **18.** $a>b$. **19.** $a<b$. **20.** $a>b$. **21.** $a=b$. **22.** $a>b$. **23.** $a<b$. **24.** $a<b$. **25.** $a>b$. **26.** $a<b$. **27.** $a<b$. **28. а)** $a>b$. *Указание.* $\log_{0,5}5>\log_{0,6}5>\log_{0,6}6$. **б)** $a<b$. *Указание.* $\log_5 0{,}7>\log_5 0{,}6>\log_4 0{,}6$. **в)** $a>b$. *Указание.* $\log_{0,6}0{,}7>\log_{0,5}0{,}7>\log_{0,5}0{,}8$. **г)** $a<b$. *Указание.* Из неравенства $\log_2 3>\log_3 4>0$ примера 21 получаем $\dfrac{1}{\log_2 3}<\dfrac{1}{\log_3 4}$ и $\log_3 2<\log_4 3$. **29.** $a>b$. *Указание.* Сравните разность чисел с нулем. **30.** $a=b$. *Указание.* Использовать тождество $a^{\log_c b}=b^{\log_c a}$. **31.** $a=b$. **32.** $a>b$. *Указание.* Использовать «укрупнение» чисел. **33.** $a>b$. **34.** $a>b$. *Указание.* Использовать неравенство Коши. **35.** $a>b$. **36.** $a>b$. **37.** $a<b$. **38.** $a>b$. **39.** $a>b$. **40.** $a>b$. **41.** $[-1;1)\cup(3;5]$.

42. $(3;3{,}5]\cup[5;+\infty)$. **43.** $\left[-\dfrac{1}{3};0\right)\cup(0;1]$.

44. $[-98;2)\cup(2;102]$.

45. $\left(-\dfrac{1}{2};0\right)\cup\left(\dfrac{3}{2};2\right)$. **46.** $[2;+\infty)$.

47. $\left(-5;-\dfrac{7\pi}{6}\right]\cup\left[\dfrac{\pi}{6};\dfrac{5\pi}{6}\right]$. **48.** $(-\infty;0]$.

49. $(-\infty;1)$. **50.** $\left(-\infty;\log_7\dfrac{16}{3}\right]$.

51. $(-\infty,1]\cup(\log_3 4,+\infty)$.

52. $(-1;2\log_3 5]\cup(3;+\infty)$. **53.** $\left(1;\log_{\frac{7}{5}}3\right)$.

54. $\left(-\infty;\log_{\frac{3}{5}}3\right)\cup(1;+\infty)$. **55.** $\left(-\infty;\log_{\frac{4}{3}}3\right]$.

56. $(-\infty;1]$. **57.** $(-\infty;-1]\cup[1-\sqrt{2};1+\sqrt{2}]\cup\cup[3;+\infty)$. **58.** $\left[\dfrac{3-\sqrt{5}}{2};\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right]$.

59. $\left[\log_{42}\dfrac{1}{63};\log_{\frac{7}{6}}\dfrac{9}{7}\right]$. **60.** $\left[\log_{\frac{4}{3}}\dfrac{9}{10};+\infty\right)$.

61. $\left(-\infty;\dfrac{1+3\log_3 11}{2+\log_3 11}\right)$. **62.** $(-\infty;-2)\cup(-2;0)$.

63. $\left(-\infty;\log_{\frac{2}{3}}3\right)\cup(-0{,}5;0{,}5)$. **64.** $0;2$.

65. $\left(-\dfrac{2}{3};2-\sqrt{6}\right]\cup\left[2+\sqrt{6};+\infty\right)$.

66. $\left(\dfrac{2}{3};\dfrac{5+\sqrt{34}}{9}\right]$. **67.** $(-1;0)\cup(4;5]$.

68. -1. **69.** $(-\infty;-2)\cup(-2;2-\sqrt{15})\cup\cup[6;+\infty)$. **70.** $(0;1)\cup(1;2)$

71. $(-\infty;-1-\sqrt{2})\cup(-1+\sqrt{2};1)\cup(1;+\infty)$.

72. $(\sqrt{2}+1;1+\sqrt{3}]$. **73.** $\dfrac{7}{4}$. **74.** $(-\infty;-2-\sqrt{3+\sqrt{5}})\cup(-3;-2-\sqrt{3-\sqrt{5}})\cup(-2+\sqrt{3-\sqrt{5}};-1)\cup\cup(-2+\sqrt{3+\sqrt{5}};+\infty)$.

75. $(-\infty;0)$. **76.** $(-\infty;-3)\cup(3;+\infty)$.

77. $(-7;-6)\cup[-3;0)\cup(0;1)\cup(1;4]$.

78. $[-9;-4)\cup(-4;-1)\cup\left(-\frac{1}{81};0\right)$.

79. $(-\log_2 6;-\log_2 3]$.

80. $(-\infty;-2]\cup[0;-2+\lg 101)$. *Указание.* Воспользуйтесь тождеством $x=\log_5 5^x$.

81. 3. **82.** $1<x<2$. **83.** $x>\frac{7}{9}$. **84.** $x>2$.

85. $\{-2\}\cup(2;4]$. **86.** $[-3;-1)\cup(-1;0)\cup$ $\cup(0;1)\cup(1;3]$. **87.** $[1;2]\cup\{3\}\cup[7;+\infty)$.

88. $\left(1-\sqrt{2};\frac{2}{3}\right)\cup\{2\}$. **89.** $\left[0;\frac{1}{6}\right)\cup\{6\}$.

90. $(-3;-1)\cup\{2\}$. **91.** $(0{,}5;1)$.

92. $(\log_2 8{,}8;\log_2 22{,}5]$. **93.** $[-4;-2-\sqrt{3})\cup(-2+\sqrt{3};\log_3 1{,}5]$.

94. $x<-2$. **95.** $(2;5]$. **96.** $(-\infty;-2)$.

97. $(4;16{,}5]$. **98.** $\left[\frac{1}{6};\frac{3}{8}\right)$. **99.** $\left(\frac{2}{5};\frac{3}{7}\right]$.

100. $(0;3-\sqrt{7}]\cup[3+\sqrt{7};3+2\sqrt{3})$.

101. $[-1;1-\sqrt{3})\cup(1+\sqrt{3};3]$. **102.** $[2+\sqrt{6};+\infty)$.

103. $(-1;1)$. **104.** $\left(\frac{2}{3};\frac{5+\sqrt{34}}{9}\right]$.

105. $\left(0;\frac{1}{2}\right]\cup(1;2)$. **106.** $[-1;0)\cup(0;2{,}5)\cup$ $\cup(\log_2 6;3)$. **107.** $\left(0;\frac{1}{4}\right)\cup\left(1;\frac{3}{2}\right)$.

108. $\left(\log_4\frac{2}{3};0\right)\cup\left[\log_2\frac{3}{2};2\right]$.

109. $(-2;\log_2(\sqrt{2}-1)]\cup[1;2)$.

110. $\left(0;\frac{1}{25}\right]\cup[25;+\infty)$.

111. $\left[\frac{1}{2};1\right)\cup(4;+\infty)$. **112.** 2. **113.** 6.

114. $(0{,}4;0{,}5)\cup(1;2]$. **115.** $\left(\frac{1}{4};\frac{1}{3}\right)\cup(1;2]$.

116. $[-1;0)\cup(0;2]$. **117.** $[-2;0)\cup(0;1]$.

118. $(9{,}3;10)$. **119.** $(8{,}1;9)$. **120.** $(2;\log_2 11]$.

121. 6. **122.** -5. **123.** 2. *Указание.* Второе неравенство привести к виду $-4x-6^x\le$ $\le -44\cdot\log_5(x+3)$ и сложить левые и правые части неравенств. **124.** $[-2;-1)\cup$ $\cup(-1;0)\cup(0;1)\cup(1;2]$. **125.** $-1{,}5$. *Указание.* См. указание к №123. Учесть далее, что $3^{4x^2-9}-2+3^{9-4x^2}=\left(3^{2x^2-4{,}5}-3^{4{,}5-24x^2}\right)^2$.

126. $\{-4\}\cup[3{,}5;4]$. *Указание.* Учесть, что $y=6^{x-6}$ и $y=5^{x-5}$ – возрастающие функции. **127.** 3. **128.** $\left[\frac{1+\sqrt{13}}{2};2{,}5\right]$. **129.** $\left(0;\frac{1}{27\sqrt{3}}\right]\cup\left(\frac{1}{9};\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\cup[1;1+\sqrt{2}]\cup[3;+\infty)$.

130. $[0{,}25;1)$. **131.** $[-2;-\sqrt{2})\cup\{0\}$.

132. $(0;2{,}5]\cup[4{,}5;+\infty)$.

133. $[-2;-1{,}5)\cup\{3\}$. **134.** 0; 4.

135. $\left(-\frac{5}{2};-2\right]\cup\{2\}$. **136.** $(0;7]$. *Указание.* Привести первое неравенство к виду $(2^{x-7}-1)(2^x+8x)\le 0$ и рассмотреть его на множестве решений первого неравенства системы. **137.** $\left(0;\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\cup\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2};3\right)$.

138. 5. **139.** $[2;+\infty)$. *Указание.* Учесть, что на ОДЗ неравенство $\log_3 a+\log_3 b\le$ $\le\log_3(a+b-1)$ равносильно неравенству $(a-1)(b-1)\le 0$. **140.** $[5;+\infty)$.

141. $[-2;-1{,}1)\cup\{3\}$. **142.** 3. **143.** 3.

144. 3. **145.** $(-1;0)\cup(0;0{,}5]\cup(1;2]$.

146. $(7;13]$. **147.** $\{-3\}\cup[2;+\infty)$.

148. $\left[0;\frac{1}{4}\right)\cup\{4\}$. **149.** 0; 3. **150.** $\left(-\frac{1}{3};0\right)\cup\{1\}$.

151. $(1;2)$. **152.** $(5;8)\cup(8;29)$. **153.** 8. **154.** 4. **155.** $(-3;-2)\cup\left(-1;-\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{3}{2};\log_2 3\right)$.

156. $(\log_4 7;1{,}5)$.

157. $0<x<\frac{1}{\sqrt{3}}$; $\sqrt{3}<x\le 4$; $x\ge 8$.

158. $(3;5-\sqrt{3})\cup(7;+\infty)$.

159. 2. **160.** 2; 3.

Список и источники литературы

1. 3000 конкурсных задач по математике. – М.: Рольф, 1997. – 608 с.

2. ЕГЭ-2012. Математика: типовые экзаменационные варианты: 30 вариантов / под ред. А.Л. Семенова, И.В. Ященко. – М.: Национальное образование, 2011. – 192 с. (ЕГЭ-2012. ФИПИ – школе).

3. ЕГЭ 2012. Математика. Типовые тестовые задания /под ред. А.Л. Семенова, И.В. Ященко. – М.: Издательство «Экзамен», 2012. – 51 с.

4. Корянов А.Г., Прокофьев А.А. Математика ЕГЭ 2011. Типовые задания С3. Методы решения неравенств с одной переменной. http://alexlarin.net/ege/2011/C3-2011.pdf

5. Подготовка к ЕГЭ по математике в 2012 году. Методические указания. /Ященко И.В., Шестаков С.А., Трепалин А.С., Захаров П.И. – М.: МЦНМО, 2012. – 208 с.

6. Потапов М.К., Олехник С.Н., Нестеренко Ю. В. Конкурсные задачи по математике: Справ. пособие. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1992. – 40 с.

7. Самое полное издание типовых вариантов заданий ЕГЭ: 2012: Математика / авт.-сост. И.Р. Высоцкий, Д.Д. Гущин, П.И. Захаров и др.; под ред. А.Л. Семенова, И.В. Ященко. – М.: АСТ: Астрель, 2011. – 93 с. (Федеральный институт педагогических измерений).

8. Сборник задач по математике для поступающих во втузы (с решениями). В 2-х кн. Кн. 1. Алгебра: Учеб. пособие / В.К. Егерев, В.В. Зайцев, Б.А. Кордемский и др.; под ред. М.И. Сканави. – 7-е изд., перераб. и доп. – М.: Высш. шк., 1994. – 528 с.

9. Шестаков С.А., Захаров П.И. ЕГЭ 2011. Математика. Задача С3 / Под ред. А.Л. Семенова, И.В. Ященко. – М.: МЦНМО, 2011.

10. http://alexlarin.net – сайт по оказанию информационной поддержки студентам и абитуриентам при подготовке к ЕГЭ, поступлению в ВУЗы и изучении различных разделов высшей математики.

11. http://eek.diary.ru/ – сайт по оказанию помощи абитуриентам, студентам, учителям по математике.