ЕГЭ-2012 по математике для "чайников": советы репетитора

Подготовься без напряга!

El Corto

Версия 2012.01

20.09.2011

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Вниманию учащихся, сдающих ЕГЭ в 2012 году,
предлагается учебное пособие для самостоятельной подготовки
«ЕГЭ-2012 ПО МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ «ЧАЙНИКОВ»: СОВЕТЫ РЕПЕТИТОРА».

Оно включает советы по решению большинства заданий «части В» экзамена,
а также примеры их решения.

Все то существенное, что обычно принято писать во введении к различным книжкам,
размещено на сайте http://EGEprosto.ru.

Свои отзывы и пожелания вы можете отправить мне через меню «Обратная связь» этого сайта.

В течение учебного года я планирую периодически обновлять текст Пособия.
Эти обновления будут связаны как с возможными изменениями в содержании ЕГЭ,
внесенными его разработчиком (ФИПИ),
так и с пожеланиями и замечаниями читателей.

В нижней части титульного листа Пособия указан номер его версии и дата его обновления.
Например, первая версия в этом учебном году обозначена номером 2012.01.

Пособие
«ЕГЭ-2012 ПО МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ «ЧАЙНИКОВ»: СОВЕТЫ РЕПЕТИТОРА»
размещено для скачивания на довольно большом количестве других сайтов подобной направленности и иных интернет – ресурсов.
Если вы скачали Пособие не на сайте автора http://EGEprosto.ru, а где-то на другом ресурсе – возможно перед вами устаревшая версия. Обратите на это внимание!

ЖЕЛАЮ УСПЕХОВ В РАБОТЕ!

АВТОР

ЕГЭ-2012: ЗАДАНИЕ B1

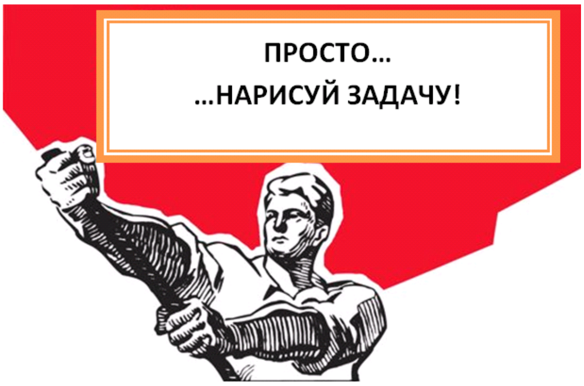
Желтые груши и красные яблоки, разноцветные кубики и кружочки. Их сложение и вычитание. Начальная школа. Что-то похожее вспоминается при взгляде на задания B1. По крайней мере – мне.
Возможно, у кого-то воспоминания о начальной школе связаны с новым мобильником, первой выкуренной сигаретой или регистрацией ВКонтакте ☺.

Кажется, что эти задания настолько просты, что ошибиться в них невозможно – и это почти так. Еще как возможно! Особенно, если делать их быстро и как попало, да еще и считать в уме.

Основные советы по выполнению этих заданий:

- ✓ Делать к ним рисунки;
- ✓ Все вычисления производить только письменно и с последующей проверкой;
- ✓ Не торопиться (а этот совет относится абсолютно ко всем заданиям!).

Итак, несколько примеров решения заданий B1.



В1.1. ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНЫЙ БИЛЕТ ДЛЯ ВЗРОСЛОГО СТОИТ 590 РУБЛЕЙ. СТОИМОСТЬ БИЛЕТА ШКОЛЬНИКА СОСТАВЛЯЕТ 50% ОТ СТОИМОСТИ БИЛЕТА ДЛЯ ВЗРОСЛОГО. ГРУППА СОСТОИТ ИЗ 14 ШКОЛЬНИКОВ И 3 ВЗРОСЛЫХ. СКОЛЬКО СТОЯТ БИЛЕТЫ НА ВСЮ ГРУППУ? ОТВЕТ ВЫРАЗИТЕ В РУБЛЯХ.

Подобные задачи удобно решать в следующем порядке.

1-Й ЭТАП: ОТРАЗИТЬ СУТЬ ЗАДАЧИ ПРОСТЫМ И ПОНЯТНЫМ РИСУНКОМ.

Из этого рисунка и будет впоследствии ясно, как ее решать.
Делаем рисунок поэтапно, по мере прочтения очередного куска условия (то есть до какой-либо точки или запятой). На рисунок нужно схематически нанести все данные из условия задачи. Например, рисунок может получиться таким (рис. 1.1).

2-Й ЭТАП: ВЫЧИСЛЕНИЯ.

Из рисунка понятно, что общая стоимость билетов равна

$14 \cdot 295 + 3 \cdot 590 = 5900$ (руб).

3-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПОЛУЧЕННЫЙ РЕЗУЛЬТАТ.

В данном случае достаточно пересчитать все заново.

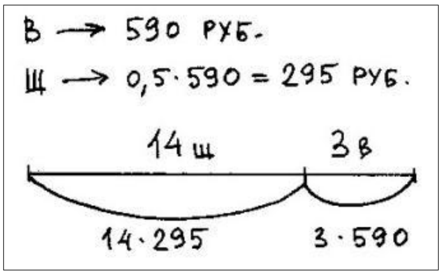


Рисунок1.1

4-Й ЭТАП: ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

5	*9*	*0*	*0*				

B1.2. ТЕПЛОХОД РАССЧИТАН НА 600 ПАССАЖИРОВ И 20 ЧЛЕНОВ КОМАНДЫ. КАЖДАЯ СПАСАТЕЛЬНАЯ ШЛЮПКА МОЖЕТ ВМЕСТИТЬ 60 ЧЕЛОВЕК. КАКОЕ НАИМЕНЬШЕЕ ЧИСЛО ШЛЮПОК ДОЛЖНО БЫТЬ НА ТЕПЛОХОДЕ, ЧТОБЫ В СЛУЧАЕ НЕОБХОДИМОСТИ В НИХ МОЖНО БЫЛО РАЗМЕСТИТЬ ВСЕХ ПАССАЖИРОВ И ВСЕХ ЧЛЕНОВ КОМАНДЫ?

1-Й ЭТАП: ОТРАЗИТЬ СУТЬ ЗАДАЧИ ПРОСТЫМ И ПОНЯТНЫМ РИСУНКОМ.

Можно предложить, например, такой вариант рисунка (рис. 1.2).

2-Й ЭТАП: ВЫЧИСЛЕНИЯ.

Найдем, «сколько раз по 60 уместится в 620-и»:

$$\frac{620}{60} = \frac{62}{6} = 10\frac{2}{6}$$

Вывод: десяти шлюпок будет недостаточно.
Значит, их должно быть 11.

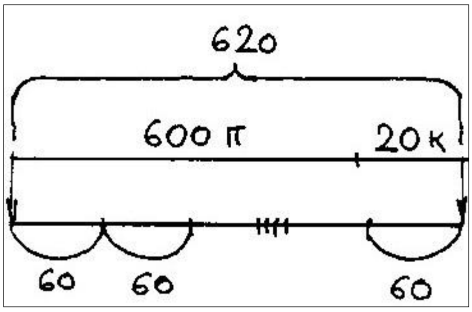


Рисунок 1. 2

3-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПОЛУЧЕННЫЙ РЕЗУЛЬТАТ.

4-Й ЭТАП: ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

1	*1*						

B1.3. СЫРОК СТОИТ 5 РУБ. 70 КОП. КАКОЕ НАИБОЛЬШЕЕ ЧИСЛО СЫРКОВ МОЖНО КУПИТЬ НА 50 РУБЛЕЙ?

1-Й ЭТАП: ОТРАЗИТЬ СУТЬ ЗАДАЧИ ПРОСТЫМ И ПОНЯТНЫМ РИСУНКОМ (РИС. 1.3).

2-Й ЭТАП: ВЫЧИСЛЕНИЯ.

$$\frac{50}{5{,}7} = \frac{500}{57} = 8\frac{44}{57}$$

(вспомнить вычисление «в столбик»!)

Вывод: на 50 рублей можно купить 8 сырков.

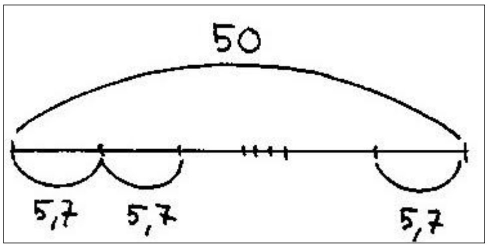


Рисунок 1. 3

3-Й ЭТАП: ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ПРОВЕРКА ОТВЕТА.

$$8 \cdot 5{,}7 \ = \ 45{,}6$$

Действительно, денег хватает только на 8 сырков.

4-Й ЭТАП: ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

8							

B1.4. В СУПЕРМАРКЕТЕ ПРОХОДИТ РЕКЛАМНАЯ АКЦИЯ: ПОКУПАЯ 4 ШОКОЛАДКИ, 5-Ю ШОКОЛАДКУ ПОКУПАТЕЛЬ ПОЛУЧАЕТ В ПОДАРОК. ШОКОЛАДКА СТОИТ 20 РУБ. КАКОЕ НАИБОЛЬШЕЕ ЧИСЛО ШОКОЛАДОК МОЖНО ПОЛУЧИТЬ ЗА 390 РУБ.?

1-Й ЭТАП: ОТРАЗИТЬ СУТЬ ЗАДАЧИ ПРОСТЫМ И ПОНЯТНЫМ РИСУНКОМ (РИС. 1.4).

2-Й ЭТАП: ВЫЧИСЛЕНИЯ.

$$\frac{390}{80} = \frac{39}{8} = 4\frac{7}{8}$$

(вычисление «в столбик»!).

Вывод: за 390 рублей можно купить 4 набора шоколадок по 4 шт. Значит, подарочных шоколадок получится 4 шт.

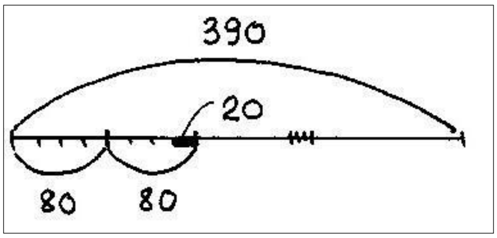


Рисунок 1.4

3-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПОЛУЧЕННЫЙ РЕЗУЛЬТАТ.

$(4 \cdot 20) \cdot 4 \ = \ 320$ – оставшихся 70 рублей на 5-й набор с подарком действительно не хватит, так как он стоит 80 рублей.

4-Й ЭТАП: ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

4							

B1.5. ЦЕНА НА ТОВАР БЫЛА ПОВЫШЕНА НА 16% И СОСТАВИЛА 348 РУБЛЕЙ. СКОЛЬКО РУБЛЕЙ СТОИЛ ТОВАР ДО ПОВЫШЕНИЯ ЦЕНЫ?

1-Й ЭТАП: ОТРАЗИТЬ СУТЬ ЗАДАЧИ ПРОСТЫМ И ПОНЯТНЫМ РИСУНКОМ (РИС. 1.5).

2-Й ЭТАП: ВЫЧИСЛЕНИЯ.

Из условия известно, что после повышения 16% цена стала равной 116% от x (то есть $1{,}16x$) а

$1{,}16x = 348$ (где x – первоначальная цена).

$x = \frac{348}{1{,}16} = \frac{34800}{116} = \frac{17400}{58} = \frac{8700}{29} = 300$

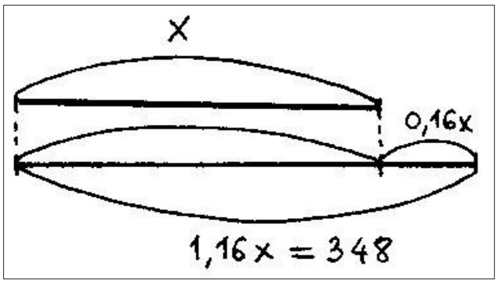


Рисунок 1.5

3-Й ЭТАП: ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ПРОВЕРКА ОТВЕТА.

$300 \cdot 1{,}16 = 348$ (вычисление «в столбик»!).

4-Й ЭТАП: ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

3	*0*	*0*					

B1.6. СТОИМОСТЬ ПОКУПКИ С УЧЕТОМ 3-ПРОЦЕНТНОЙ СКИДКИ ПО ДИСКОНТНОЙ КАРТЕ СОСТАВИЛА 1746 РУБЛЕЙ. СКОЛЬКО РУБЛЕЙ ПРИШЛОСЬ БЫ ЗАПЛАТИТЬ ЗА ПОКУПКУ ПРИ ОТСУТСТВИИ ДИСКОНТНОЙ КАРТЫ?

1-Й ЭТАП: ОТРАЗИТЬ СУТЬ ЗАДАЧИ ПРОСТЫМ И ПОНЯТНЫМ РИСУНКОМ (РИС. 1.6).

2-Й ЭТАП: ВЫЧИСЛЕНИЯ.

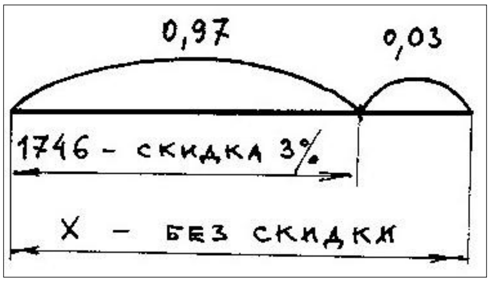


Рисунок 1.6

1-й вариант.

На рисунке видно, что $0{,}97x = 1746$.

Тогда $x = \frac{1746}{0{,}97} = \frac{174600}{97} = 1800$ (руб).

2-й вариант.

Можно составить пропорцию:

$0{,}97\,x$ – 1746 руб.

x – ? руб.; $? = \dfrac{1746x}{0{,}97x} = 1800$ (руб).

3-Й ЭТАП ПРОВЕРИТЬ ПОЛУЧЕННЫЙ РЕЗУЛЬТАТ.

$0{,}97 \cdot 1800$ = (вычисление «в столбик»!) $= 1746$ – правильно!

4-Й ЭТАП: ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

1	*8*	*0*	*0*				

B1.7. РОЗНИЧНАЯ ЦЕНА УЧЕБНИКА 345 РУБ., ОНА НА 18% ВЫШЕ ОПТОВОЙ ЦЕНЫ. КАКОЕ НАИБОЛЬШЕЕ ЧИСЛО ТАКИХ УЧЕБНИКОВ МОЖНО КУПИТЬ ПО ОПТОВОЙ ЦЕНЕ НА 7000 РУБЛЕЙ?

1-Й ЭТАП: ОТРАЗИТЬ СУТЬ ЗАДАЧИ ПРОСТЫМ И ПОНЯТНЫМ РИСУНКОМ.

Если первый вариант рисунка к задаче вдруг показался вам не совсем хорошим (например, рис. 1.7а), то его можно быстро переделать (рис. 1.7б).

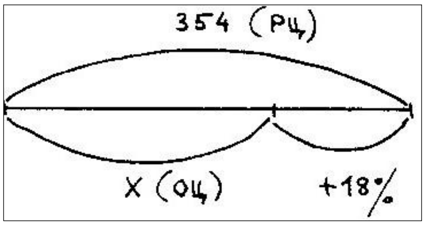


Рисунок 1.7а

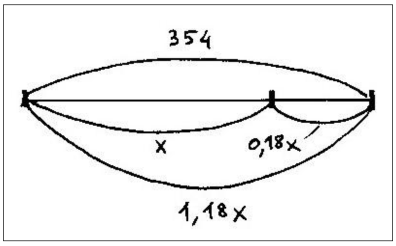


Рисунок 1.7б

2-Й ЭТАП: ВЫЧИСЛЕНИЯ.

На рисунке видно, что $1{,}18x = 354$.

Оптовая цена $x = \frac{354}{1{,}18} = \frac{35400}{118} = \frac{17700}{59} = 300.$

На 7000 рублей можно купить $\frac{7000}{300} = \frac{70}{3} = 23\frac{1}{3}.$

3-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПОЛУЧЕННЫЙ РЕЗУЛЬТАТ.

$300 \cdot 1{,}18$ = (вычисление «в столбик»!) = 354.
Оптовая цена найдена правильно.
$23 \cdot 300$ = (вычисление «в столбик»!) = 6900.
Денег хватит на 23 учебника, и еще останется 100 рублей.
Правильно.

4-Й ЭТАП: ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

2	***3***						

Ввиду исключительной простоты заданий B1, приведенных примеров должно быть достаточно для понимания общего подхода к ним.

В первое время вам может быть лениво делать рисунки к таким простым задачкам, но эту (такую понятную) лень лучше победить сразу, так как навыки составления рисунков еще очень даже пригодятся в дальнейшем.
Особенно, в заданиях B13, к которым без рисунков лучше даже не подходить!
Так что лучше начинать учиться вовремя и на простом ☺.

Ну что, я вас убедил?

Не тут-то было! Как показывает практика, некоторая часть учеников так и не будет делать никаких рисунков вообще. А некоторая часть порисует – порисует, а потом вернется к менее удобной, но зато такой привычной (!) для них схеме работы.

Именно поэтому решим несколько задач традиционным, «школьным» способом. Как говорится «почувствуйте разницу».

B1.8. БИЛЕТ НА НАЗЕМНЫЙ ТРАНСПОРТ СТОИЛ 20 РУБ. ПОСЛЕ ПОВЫШЕНИЯ ЦЕНЫ НА 10% НА СКОЛЬКО БИЛЕТОВ МЕНЬШЕ МОЖНО КУПИТЬ НА 200 РУБ.?

1-Й ЭТАП: РАССУЖДЕНИЯ И ВЫЧИСЛЕНИЯ.

На 200 руб. до повышения цены можно было купить $\frac{200}{20} = 10$ билетов.

После повышения цены денег хватит на $\frac{200}{22} = \frac{100}{11} = 9\frac{1}{11}$ (то есть 9) билетов.

Отвечая на вопрос задачи «на сколько билетов меньше…», вычтем из большего их количества меньшее: $10 - 9 = 1$. Это и будет ответом задачи.

2-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПОЛУЧЕННЫЙ РЕЗУЛЬТАТ.

Повторим все вычисления заново.

3-Й ЭТАП: ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

1							

B1.9. ПРИ ПОКУПКЕ ТОВАРОВ НА СУММУ СВЫШЕ 10000 РУБ. МАГАЗИН ПРЕДОСТАВЛЯЕТ СКИДКУ 15%. КАКУЮ СУММУ НАДО ЗАПЛАТИТЬ ЗА КОМПЬЮТЕР СТОИМОСТЬЮ 16500 РУБ.?

1-Й ЭТАП: РАССУЖДЕНИЯ И ВЫЧИСЛЕНИЯ.

Компьютер стоит больше 10000 руб., значит с его первоначальной, 100% - ой стоимости предусмотрена скидка. Таким образом, его можно купить не за 100%, а за $100 - 15 = 85\%$.

Окончательная цена равна $(1 - 0{,}15) \cdot 16500 = 0{,}85 \cdot 16500 = 14025$ рублей.

2-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПОЛУЧЕННЫЙ РЕЗУЛЬТАТ.

Повторим все вычисления заново.

3-Й ЭТАП: ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

1	*4*	*0*	*2*	*5*			

B1.10. ТРАНСПОРТЕР ЗА 40 МИНУТ РАБОТЫ ПОДАЕТ 1,4 ТОНН РУДЫ. ПОСЛЕ ЭТОГО СЛЕДУЕТ 10-ТИ МИНУТНЫЙ ПЕРЕРЫВ. СКОЛЬКО ТОНН РУДЫ БУДЕТ ПОДАНО С 9 ДО 13 ЧАСОВ?

1-Й ЭТАП: РАССУЖДЕНИЯ И ВЫЧИСЛЕНИЯ.

По условию задачи, транспортер работает 4 часа, то есть $4 \cdot 60 = 240$ минут.
Также известно, что один «цикл работы» длится $40 + 10 = 50$ минут.
Найдем количество таких полных циклов за 240 минут: $\frac{240}{50} = \frac{24}{5} = 4\frac{4}{5}$.

«Остаточные» $\frac{4}{5}$ цикла составляют $\frac{4}{5} \cdot 50 = 40$ минут, то есть за этот неполный цикл будет добыт «полный объем» руды в 1,4 тонны.

Итак, общее количество добытой руды равно $4 \cdot 1{,}4 + 1{,}4 = 5 \cdot 1{,}4 = 7$ тонн.

2-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПОЛУЧЕННЫЙ РЕЗУЛЬТАТ.

Повторим все вычисления заново.

3-Й ЭТАП: ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

7							

Не знаю как вам, а мне в последних трех задачах не хватало своих пусть и корявых, но таких «разгружающих мозг» картинок.

Для самостоятельного решения подобных задач воспользуйтесь
[«Открытым банком заданий по математике»](#).

А теперь подведем краткие итоги этой главы на картинке, размещенной на следующей странице.

Успехов вам в самых первых заданиях ЕГЭ!

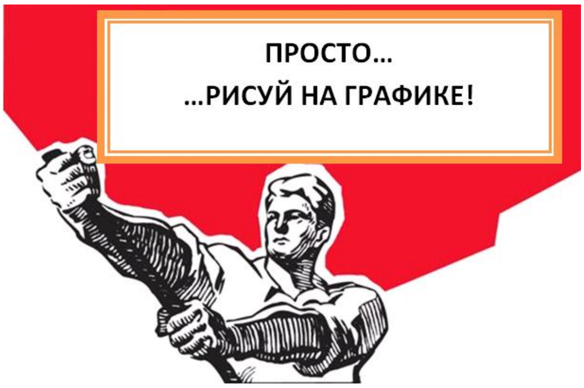
ЕГЭ-2012: ЗАДАНИЕ В2

Задания В2 – самые простые из всех заданий ЕГЭ.
Кажется, что достаточно только посмотреть на график, и правильный ответ будет найден.
Но даже в этом задании время от времени случаются ошибки!

А чтобы этого не произошло, нужно подстраховаться: не торопясь нарисовать (!) на графике ответ на заданный вопрос. Сделав на нем перед этим необходимые пометки, и еще раз внимательно перечитав само задание.

Цель работы с В2 – не показать свой могучий математический интеллект и быстроту мышления, а заработать на нем такой необходимый балл.
Поэтому права на ошибку (типа «ой, я неправильно посмотрел») здесь точно нет!

Рассмотрим несколько типичных примеров таких заданий.



B2.1. НА ГРАФИКЕ ПОКАЗАНО ИЗМЕНЕНИЕ ЦЕНЫ БИЛЕТА НА ОДНУ ПОЕЗДКУ В САМАРСКОМ МЕТРОПОЛИТЕНЕ В ПЕРИОД С 1 ЯНВАРЯ 1998 ПО 1 ЯНВАРЯ 2009 ГОДА. ВО СКОЛЬКО РАЗ УВЕЛИЧИЛАСЬ СТОИМОСТЬ ПОЕЗДКИ НА МЕТРО С 1 ЯНВАРЯ 2001 ГОДА ПО 1 МАРТА 2007 ГОДА? (РИС. 2.1).

1-Й ЭТАП: РАБОТА С ГРАФИКОМ.

Ответить на вопрос «во сколько раз увеличилась…» очень просто: найдем стоимость поездки на 1 марта 2007 года и поделим ее на стоимость поездки 1 января 2001 года (то, что стало – на то, что было).

Делаем на графике пометки и вычисляем:

$$\frac{\text{стало}}{\text{было}} = \frac{9}{3} = 3 \text{ раз}$$

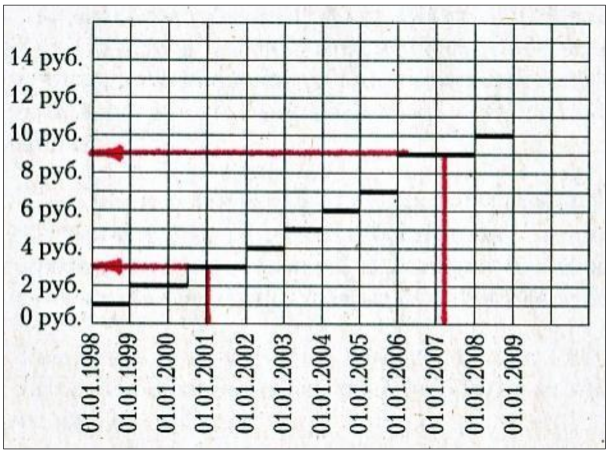


Рисунок 2.1

2-Й ЭТАП: ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

3							

B2.2. НА ГРАФИКЕ ПОКАЗАНО ИЗМЕНЕНИЕ ТЕМПЕРАТУРЫ ВОЗДУХА НА ПРОТЯЖЕНИИ ТРЕХ СУТОК, НАЧИНАЯ С 0 Ч. 13 АВГУСТА. НА ОСИ АБСЦИСС ОТМЕЧАЕТСЯ ВРЕМЯ СУТОК В ЧАСАХ, НА ОСИ ОРДИНАТ – ЗНАЧЕНИЕ ТЕМПЕРАТУРЫ В ГРАДУСАХ. ОПРЕДЕЛИТЕ ПО ГРАФИКУ, ДО КАКОЙ НАИБОЛЬШЕЙ ТЕМПЕРАТУРЫ ПРОГРЕЛСЯ ВОЗДУХ 14 АВГУСТА. ОТВЕТ ДАЙТЕ В ГРАДУСАХ ЦЕЛЬСИЯ (РИС. 2.2).

1-Й ЭТАП: РАБОТА С ГРАФИКОМ.

Отмечаем на рисунке границы (начало и конец суток) 14 августа. Находим максимальную температуру за этот день (12 °C), причем в ответ единицу измерения записывать не нужно.

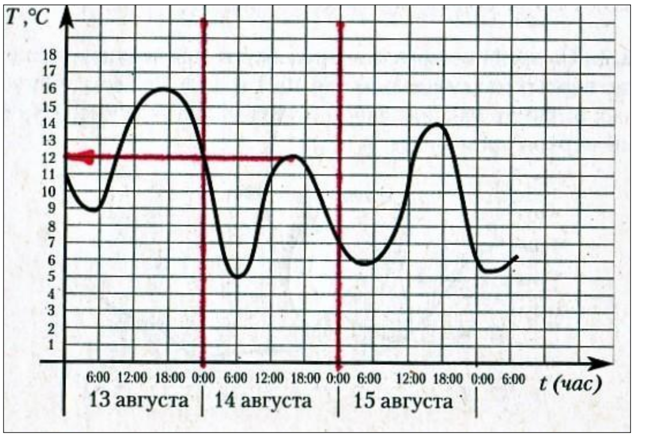


Рисунок 2.2

2-Й ЭТАП: ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

1	***2***						

**B2.3. НА ГРАФИКЕ ПОКАЗАНА СРЕДНЕСУТОЧНАЯ ТЕМПЕРАТУРА ВОЗДУХА В ТЕЧЕНИЕ ПЕРВЫХ ДВУХ НЕДЕЛЬ ИЮЛЯ 1991 ГОДА В ИЖЕВСКЕ.
КАКОГО ЧИСЛА (В НАБЛЮДАЕМЫЙ ПЕРИОД) ТЕМПЕРАТУРА ВПЕРВЫЕ УПАЛА ДО 18 ГРАДУСОВ (РИС. 2.3)?**

1-Й ЭТАП: РАБОТА С ГРАФИКОМ.

Из графика видно: понижаясь с начала июля, среднесуточная температура впервые равна $18°C$ 4-го числа.

Рисунок 2.3

2-Й ЭТАП: ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

4							

B2.4. НА ДИАГРАММЕ ПОКАЗАНО ИЗМЕНЕНИЕ ЦЕНЫ НА СЕРЕБРО В ПЕРИОД С 3 ПО 17 АВГУСТА 2009 ГОДА (В ДОЛЛАРАХ ЗА УНЦИЮ). СКОЛЬКО ДНЕЙ ЗА РАССМАТРИВАЕМЫЙ ПЕРИОД ВРЕМЕНИ ЦЕНА ПРЕВЫШАЛА 14,5 ДОЛЛАРОВ ЗА УНЦИЮ (РИС. 2.4)?

1-Й ЭТАП: РАБОТА С ГРАФИКОМ.

«Превышала 14,5 долларов» означает, что была больше этого числа.
Отмечаем и подсчитываем на графике количество таких дней (получается 10 дней).

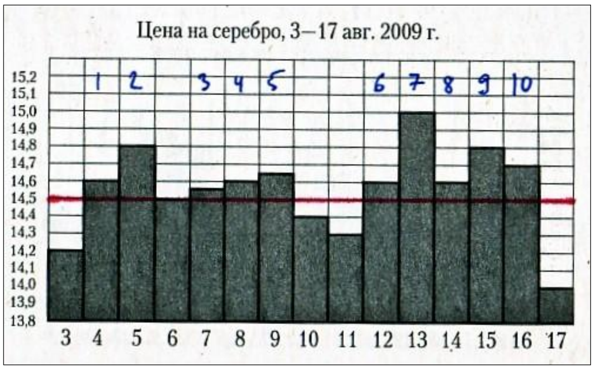


Рисунок 2.4

2-Й ЭТАП: ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

1	*0*						

B2.5. НА РИСУНКЕ ИЗОБРАЖЕН ГРАФИК СРЕДНЕСУТОЧНОЙ ТЕМПЕРАТУРЫ В Г. ОМСКЕ В ПЕРИОД С 14 ПО 27 ЯНВАРЯ 1974 Г. НА ОСИ АБСЦИСС ОТКЛАДЫВАЮТСЯ ЧИСЛА, НА ОСИ ОРДИНАТ – ТЕМПЕРАТУРА В ГРАДУСАХ ЦЕЛЬСИЯ. ОПРЕДЕЛИТЕ ПО ГРАФИКУ, СКОЛЬКО ДНЕЙ ИЗ УКАЗАННОГО ПЕРИОДА СРЕДНЯЯ ТЕМПЕРАТУРА БЫЛА В ПРЕДЕЛАХ ОТ $-26\,^\circ\mathrm{C}$ ДО $-21,5\,^\circ\mathrm{C}$ (РИС. 2.5).

1-Й ЭТАП: РАБОТА С ГРАФИКОМ.

«В пределах от $-26\,^\circ\mathrm{C}$ до $-21,5\,^\circ\mathrm{C}$» нужно понимать как сами числа
-26 и $-21,5$,
и все, что находится между ними.
Отмечаем на графике этот «коридор» и количество дней в нем (7 дней).

Рисунок 2.5

2-Й ЭТАП: ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

7							

B2.6. НА РИСУНКЕ ИЗОБРАЖЕН ГРАФИК СРЕДНЕСУТОЧНОЙ ТЕМПЕРАТУРЫ В Г. РИГЕ В ПЕРИОД С 15 ПО 28 МАРТА 1943 Г. НА ОСИ АБСЦИСС ОТКЛАДЫВАЮТСЯ ЧИСЛА, НА ОСИ ОРДИНАТ – ТЕМПЕРАТУРА В ГРАДУСАХ ЦЕЛЬСИЯ.
ОПРЕДЕЛИТЕ ПО ГРАФИКУ, СКОЛЬКО ДНЕЙ ИЗ УКАЗАННОГО ПЕРИОДА СРЕДНЯЯ ТЕМПЕРАТУРА БЫЛА НЕ НИЖЕ $3\ ^\circ\mathrm{C}$ (РИС. 2.6).

1-Й ЭТАП: РАБОТА С ГРАФИКОМ.

Слова «не ниже $3\ ^\circ C$» нужно понимать как саму температуру $3\ ^\circ C$ и все, что больше нее. Отмечаем на графике границу $3\ ^\circ C$ и подсчитываем количество дней (5 дней).

Рисунок 2.6

2-Й ЭТАП: ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

5							

B2.7. НА РИСУНКЕ ИЗОБРАЖЕН ГРАФИК, ОПИСЫВАЮЩИЙ ПРЯМОЛИНЕЙНОЕ ДВИЖЕНИЕ АВТОМОБИЛЯ. ПО ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ОСИ ОТЛОЖЕНО ВРЕМЯ (В ЧАСАХ), ПО ВЕРТИКАЛЬНОЙ – РАССТОЯНИЕ ОТ ПУНКТА А (В КИЛОМЕТРАХ). ИЗВЕСТНО, ЧТО ЧЕРЕЗ 180 МИНУТ ПОСЛЕ НАЧАЛА ДВИЖЕНИЯ АВТОМОБИЛЬ ДОСТИГ ПУНКТА В И ПРОДОЛЖИЛ ДВИЖЕНИЕ.
ОПРЕДЕЛИТЕ РАССТОЯНИЕ В КИЛОМЕТРАХ МЕЖДУ ПУНКТАМИ А И В (РИС. 2.7).

1-Й ЭТАП: РАБОТА С ГРАФИКОМ.

Единственное, что нужно сообразить в этой задаче – это то, что 180 минут $=$ 3 часа.

А дальше – работа с графиком.

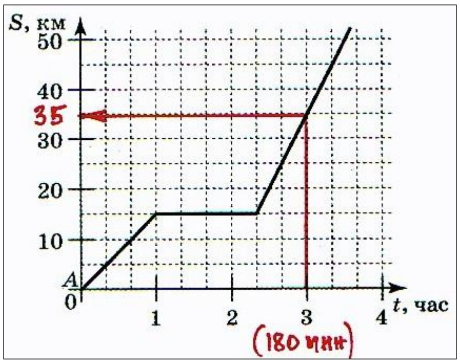


Рисунок 2.7

2-Й ЭТАП: ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

3	*5*						

B2.8. НА РИСУНКЕ ИЗОБРАЖЕН ГРАФИК, ОПИСЫВАЮЩИЙ ПРЯМОЛИНЕЙНОЕ ДВИЖЕНИЕ АВТОМОБИЛЯ ОТ ПУНКТА А ДО ПУНКТА В. ПО ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ОСИ ОТЛОЖЕНО ВРЕМЯ (В ЧАСАХ), ПО ВЕРТИКАЛЬНОЙ – РАССТОЯНИЕ ОТ ПУНКТА А (В КИЛОМЕТРАХ). ДОЕХАВ ДО ПУНКТА В, АВТОМОБИЛЬ СДЕЛАЛ В НЕМ ОСТАНОВКУ, ПОСЛЕ ЧЕГО ВЕРНУЛСЯ В ПУНКТ А. ОПРЕДЕЛИТЕ, СКОЛЬКО МИНУТ ДЛИЛАСЬ ОСТАНОВКА (РИС. 2.8).

1-Й ЭТАП: РАБОТА С ГРАФИКОМ.

По графику видно, что величина пройденного пути не изменялась (то есть была остановка) на протяжении 80 минут:
4 клетки по 20 минут каждая.

2-Й ЭТАП: ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

8	*0*						

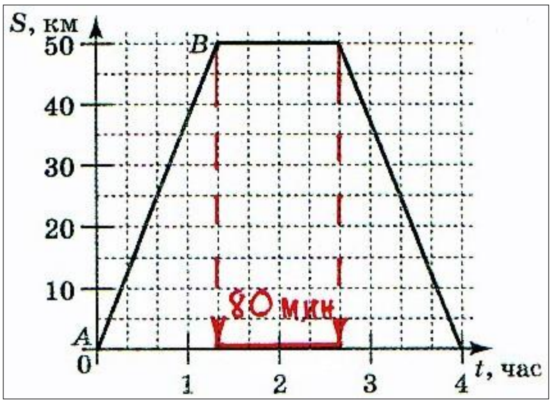


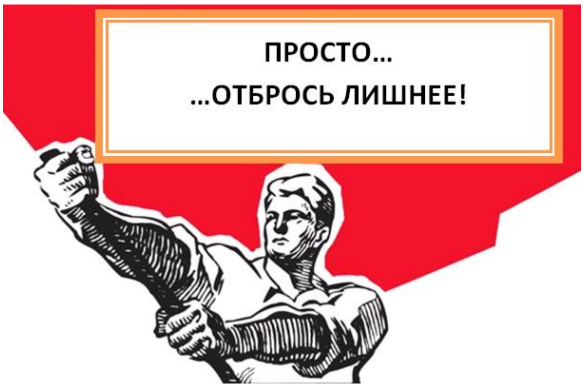
Рисунок 2.8

Более разноплановые задания B2 можно найти в
«Открытом банке заданий по математике», и как следует потренироваться на них!

ЕГЭ-2012: ЗАДАНИЕ В3

Суть заданий В3 напоминает некую забаву из начальных классов школы, и сводится к нахождению площади нарисованной фигуры.

Как ни странно, но даже в этом задании существуют несколько способов решения. В том числе – сложные и неудобные. Мы их, естественно, рассматривать не будем, а сразу перейдем к одному простому и универсальному способу.
Простым я его называю потому, что вам не потребуется знание формул площадей различных геометрических фигур (кроме площади прямоугольника – что не так уж много). С помощью этого способа легко можно найти площадь абсолютно любой фигуры, предлагаемой на ЕГЭ.



Суть этого способа будет понятна из конкретных примеров.

В3.1. НАЙДИТЕ ПЛОЩАДЬ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКА, ИЗОБРАЖЕННОГО НА КЛЕТЧАТОЙ БУМАГЕ С РАЗМЕРОМ КЛЕТКИ $1\text{см} \times 1\text{см}$. ОТВЕТ ДАЙТЕ В КВАДРАТНЫХ САНТИМЕТРАХ (РИС. 3.1).

1-ЭТАП: НАРИСОВАТЬ ВОКРУГ ДАННОЙ ФИГУРЫ ПРЯМОУГОЛЬНИК И ОТМЕТИТЬ «ЛИШНИЕ» ТРЕУГОЛЬНИКИ («КАНДИДАТЫ НА ВЫЛЕТ»).

Построим вокруг искомого четырехугольника прямоугольник со сторонами a и b (одна из них должна быть обязательно горизонтальна, другая - вертикальна). Очевидно, что искомая площадь равна площади «зеленого» прямоугольника, за вычетом площадей 4-х лишних одинаковых треугольников.

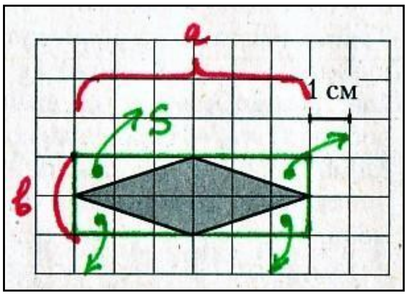


Рисунок 3.1

2-Й ЭТАП: ПОДРОБНОЕ (!) ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЛОЩАДИ (НА ОСНОВАНИИ РИСУНКА).

$$S = S_{\text{прям}} - 4S = ab - 4S = 2 \cdot 6 - 4 \cdot \frac{1 \cdot 3}{2} = 12 - 6 = 6$$

На рисунке видно, что площадь каждого из «выброшенных» треугольников равна половине произведения его катетов (в этом примере $S = \frac{1 \cdot 3}{2}$).

3-Й ЭТАП: ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ПРОВЕРКА ОТВЕТА.

«Вы таки опять будете смеяться!», но даже здесь периодически бывают ошибки. Наиболее правильный путь – решить все заново, не заглядывая в предыдущее решение.

4-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

6							

B3.2. НАЙДИТЕ ПЛОЩАДЬ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКА, ИЗОБРАЖЕННОГО НА КЛЕТЧАТОЙ БУМАГЕ С РАЗМЕРОМ КЛЕТКИ 1СМ $\times$ 1СМ. ОТВЕТ ДАЙТЕ В КВАДРАТНЫХ САНТИМЕТРАХ (РИС. 3.2).

1-ЭТАП: НАРИСОВАТЬ ВОКРУГ ДАННОЙ ФИГУРЫ ПРЯМОУГОЛЬНИК И ОТМЕТИТЬ «ЛИШНИЕ» ТРЕУГОЛЬНИКИ.

2-Й ЭТАП: ПОДРОБНОЕ (!) ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЛОЩАДИ (НА ОСНОВАНИИ РИСУНКА).

В нашем примере это трапеция, и ее площадь вычислим так:

$$S = S_{\text{прям}} - (S_1 + S_2) = ab - (S_1 + S_2) =$$

$$= 3 \cdot 7 - \left(\frac{3 \cdot 6}{2} + \frac{3 \cdot 4}{2}\right) = 21 - (9 + 6) = 21 - 15 = 6$$

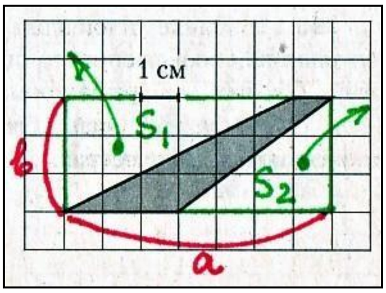


Рисунок 3.2

3-Й ЭТАП: ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ПРОВЕРКА ОТВЕТА.

4-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

6							

B3.3. НАЙДИТЕ ПЛОЩАДЬ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКА, ИЗОБРАЖЕННОГО НА КЛЕТЧАТОЙ БУМАГЕ С РАЗМЕРОМ КЛЕТКИ 1СМ × 1СМ. ОТВЕТ ДАЙТЕ В КВАДРАТНЫХ САНТИМЕТРАХ (РИС. 3.3).

1-ЭТАП: НАРИСОВАТЬ ВОКРУГ ДАННОЙ ФИГУРЫ ПРЯМОУГОЛЬНИК И ОТМЕТИТЬ «ЛИШНИЕ» ТРЕУГОЛЬНИКИ.

2-Й ЭТАП: ПОДРОБНОЕ (!) ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЛОЩАДИ (НА ОСНОВАНИИ РИСУНКА).

$$\mathrm{S} = S_{\text{прям}} - (2\mathrm{S}_1 + 2\mathrm{S}_2) = \mathrm{ab} - 2(\mathrm{S}_1 + \mathrm{S}_2) =$$

$$= 5 \cdot 5 - 2\left(\frac{2 \cdot 2}{2} + \frac{3 \cdot 3}{2}\right) = 25 - 2(2 + 4{,}5) = 25 - 13 = 12$$

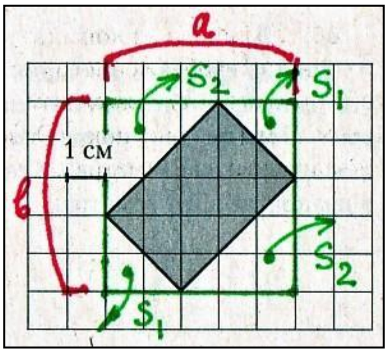


Рисунок 3.3

3-Й ЭТАП: ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ПРОВЕРКА ОТВЕТА.

4-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

1	*2*						

B3.4. ОСНОВАНИЯ РАВНОБЕДРЕННОЙ ТРАПЕЦИИ РАВНЫ 2 И 14, А ЕЕ БОКОВЫЕ СТОРОНЫ РАВНЫ 10. НАЙДИТЕ ПЛОЩАДЬ ТРАПЕЦИИ.

А в этой задаче нет готового рисунка, поэтому сделаем его сами (рис. 3.4).

1-ЭТАП: НАРИСОВАТЬ ВОКРУГ ДАННОЙ ФИГУРЫ ПРЯМОУГОЛЬНИК И ОТМЕТИТЬ «ЛИШНИЕ» ТРЕУГОЛЬНИКИ.

2-Й ЭТАП: ПОДРОБНОЕ (!) ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЛОЩАДИ (НА ОСНОВАНИИ РИСУНКА).

$$\mathrm{S} = S_{\text{прям}} - 2\mathrm{S} = 14\mathrm{y} - 2\left(\frac{6\mathrm{y}}{2}\right) = 14\mathrm{y} - 6\mathrm{y} = 8\mathrm{y}$$

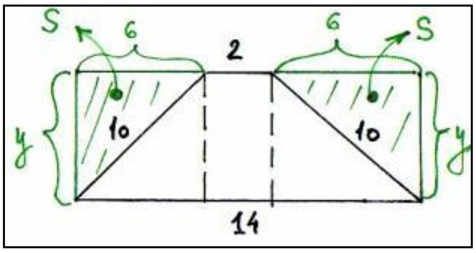


Рисунок 3.4

По т. Пифагора найдем y из любого заштрихованного треугольника:

$$10^2 = 6^2 + \mathrm{y}^2$$

$$\mathrm{y}^2 = 10^2 - 6^2 = 100 - 36 = 64$$

$$\mathrm{y} = \pm 8$$

По смыслу задачи подходит корень $\mathrm{y} = 8$.

Таким образом, $\mathrm{S} = 8\mathrm{y} = 64$.

3-Й ЭТАП: ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ПРОВЕРКА ОТВЕТА.

В основу проверки можно взять следующий факт: сумма площадей трапеции и 2-х заштрихованных треугольников должна равняться площади всего прямоугольника. Проверим это.

$$8\mathrm{y} + 64 = 14y$$

$$48 + 64 = 14 \cdot 8$$

$$112 = 112$$

Все правильно!

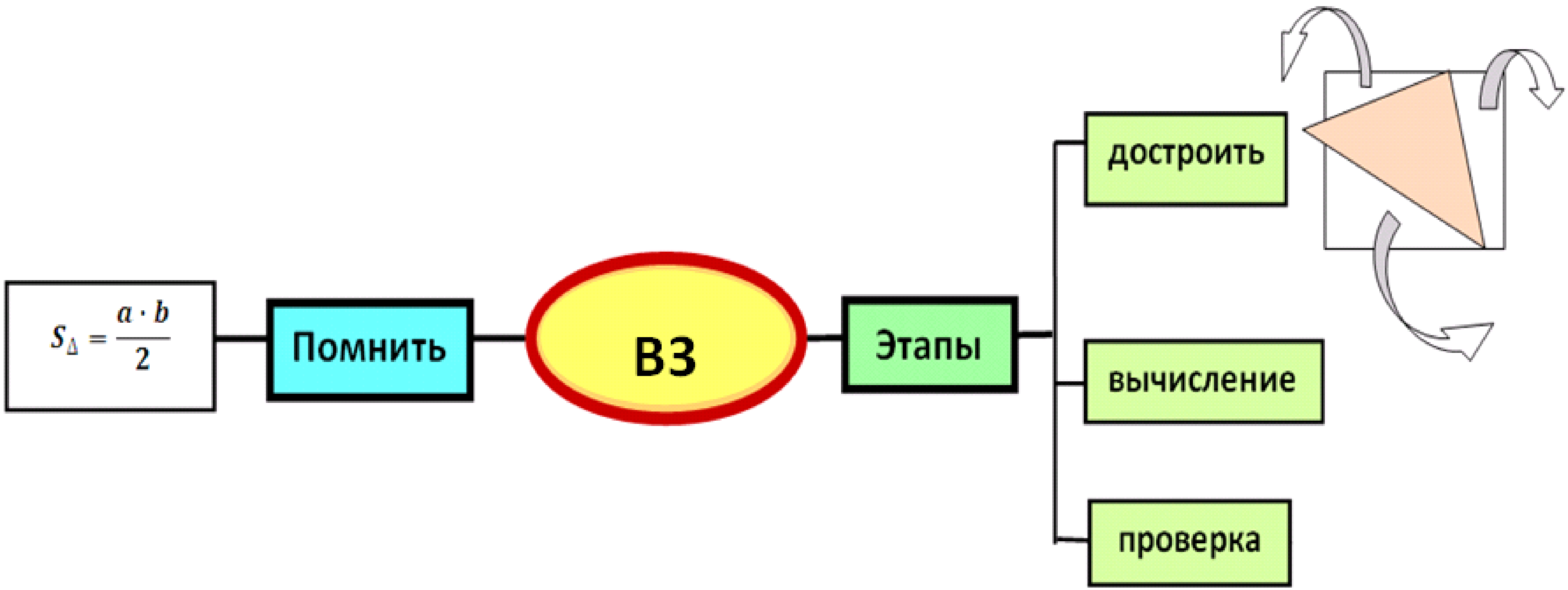
4-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

6	*4*						

Последняя задача является примером того, что геометрическая фигура не обязательно будет дана на клетчатом фоне – клеток может и не быть. Но это ничего не меняет в способе ее решения.
Так что не нужно впадать в ступор, если на рисунке вы не увидели знакомых клеточек ☺!

Приведенных примеров вполне достаточно, чтобы научиться самостоятельно решать такие простые задания. Хотя, возможно, вам больше нравится (или просто привычнее) использовать формулы площадей различных фигур. Или считать количество клеточек.
Если так – пользуйтесь этим на здоровье. Лишь бы ответ был правильным!

И, как всегда, для проверки своих умений, не будет лишним сходить в «Открытый банк заданий по математике».



$S_{\Delta} = \frac{a \cdot b}{2}$
Помнить
B3
Этапы
достроить
вычисление
проверка

ЕГЭ-2012: ЗАДАНИЕ В4

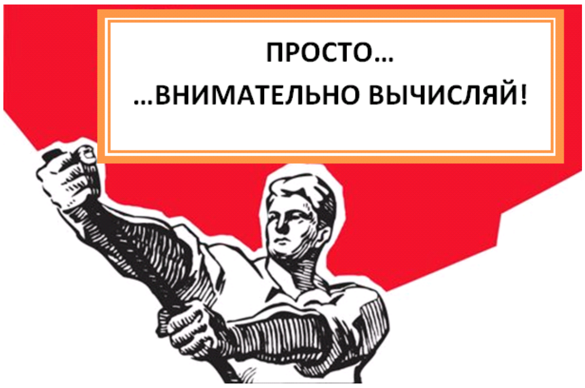
Задания В4, которые представлены длинными многословными задачами, сначала производят невеселое впечатление – они кажутся сложными.
На самом деле они просто громоздкие и долгие в решении. Кроме того, они требуют внимания в вычислениях.

Решаются же они довольно просто, если к ним правильно подойти.
А этот правильный подход, в свою очередь, сам по себе довольно прост.

А именно: сначала всю информацию из условия нужно перенести на простой рисунок (схему) для хорошего обзора. И уже затем, имея перед собой «отжатую» информацию, нужно проделать вычисления по всем предлагаемым в условии вариантам выбора.
Если же рисунок уже дается в условии, то необходимые пометки можно делать прямо на нем.

Распространенный и такой понятный (лень и отсутствие привычки) соблазн не делать никаких рисунков вообще, а заняться сразу вычислениями, да еще и в уме, часто приводит к закономерному результату: ответ получается «хороший, но неправильный» ☺!

Подход, который мне кажется полезным и вполне работающим, показан на ряде типичных примеров.



В4.1. ИЗ ПУНКТА А В ПУНКТ D ВЕДУТ ТРИ ДОРОГИ. ЧЕРЕЗ ПУНКТ В ЕДЕТ ГРУЗОВИК СО СРЕДНЕЙ СКОРОСТЬЮ 34 КМ/Ч, ЧЕРЕЗ ПУНКТ С ЕДЕТ АВТОБУС СО СРЕДНЕЙ СКОРОСТЬЮ 58 КМ/Ч. ТРЕТЬЯ ДОРОГА – БЕЗ ПРОМЕЖУТОЧНЫХ ПУНКТОВ, И ПО НЕЙ ДВИЖЕТСЯ ЛЕГКОВОЙ АВТОМОБИЛЬ СО СРЕДНЕЙ СКОРОСТЬЮ 44 КМ/Ч. НА РИСУНКЕ ПОКАЗАНА СХЕМА ДОРОГ И РАССТОЯНИЕ МЕЖДУ ПУНКТАМИ ПО ДОРОГАМ. ВСЕ ТРИ АВТОМОБИЛЯ ОДНОВРЕМЕННО ВЫЕХАЛИ ИЗ ПУНКТА А. КАКОЙ АВТОМОБИЛЬ ДОБРАЛСЯ ДО ПУНКТА D ПОЗЖЕ ДРУГИХ?
В ОТВЕТЕ УКАЖИТЕ, СКОЛЬКО ЧАСОВ ОН НАХОДИЛСЯ В ДОРОГЕ (РИС. 4.1).

1-Й ЭТАП: НАНЕСТИ ВСЕ ДАННЫЕ ИЗ УСЛОВИЯ НА УЖЕ ИМЕЮЩИЙСЯ В ЗАДАНИИ РИСУНОК.

2-Й ЭТАП: СДЕЛАТЬ ПОДРОБНЫЕ (!) ВЫЧИСЛЕНИЯ ДЛЯ ВСЕХ ПЕРЕЧИСЛЕННЫХ В ЗАДАНИИ ВАРИАНТОВ.

В нашем примере нужно вычислить время движения по трем маршрутам, используя для этого очевидную формулу
$t = s/v$
(а что же еще можно использовать, если путь и скорость даны, а нужно найти время?).

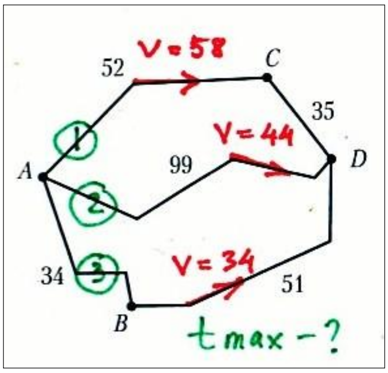


Рисунок 4.1

1-маршрут. $t = \frac{52+35}{58} = \frac{87}{58} = 1{,}5$ (час)

2-маршрут. $t = \frac{99}{44} = 2\frac{11}{44} = 2\frac{1}{4} = 1{,}25$ (час)

3-маршрут. $t = \frac{34+51}{34} = \frac{85}{34} = 2{,}5$ (час)

В этом примере нужно указать наибольшее время движения.

3-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ СДЕЛАННЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ.

4-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

2	,	5					

В4.2. СТРОИТЕЛЬНОЙ ФИРМЕ НУЖНО ПРИОБРЕСТИ 73 КУБОМЕТРА ПЕНОБЕТОНА. У НЕЕ ЕСТЬ 3 ПОСТАВЩИКА. СКОЛЬКО РУБЛЕЙ ПРИДЕТСЯ ЗАПЛАТИТЬ ЗА САМУЮ ДЕШЕВУЮ ПОКУПКУ С ДОСТАВКОЙ? ЦЕНА И УСЛОВИЯ ДОСТАВКИ ПРИВЕДЕНЫ В ТАБЛИЦЕ (РИС. 4.2).

1-Й ЭТАП: ИСПОЛЬЗОВАТЬ ИМЕЮЩУЮСЯ ТАБЛИЦУ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЙ.

В этом конкретном случае все расчеты можно произвести прямо в свободных местах таблицы.
Как и во всех других случаях, важно все существенные действия (вычисления чисел, показ каких-либо моментов стрелками и так далее) упорядоченно сделать на бумаге.
Это впоследствии облегчит проверку своих действий и снизит вероятность ошибки.
Как видно, самый дешевый вариант покупки предлагает поставщик А: 198050 руб.

ВСЕГО НУЖНО 73 М³

Поставщик	Стоимость пенобетона (руб. за 1 м³)	Стоимость доставки в рублях	Дополнительные условия
А	73 · 2650 = 193 450 +	4600 =	198 050
Б	73 · 3000 = 219 000	~~5600~~	= 219 000 При заказе на сумму больше 150000 руб. доставка бесплатно
В	73 · 2680 = 195 640 +	3600 =	= 199 240 При заказе более 75 м³ доставка бесплатно

Рисунок 4.2

2-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ СДЕЛАННЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ.

3-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

1	9	8	0	5	0		

B4.3. ИНТЕРНЕТ – ПРОВАЙДЕР (КОМПАНИЯ, ОКАЗЫВАЮЩАЯ УСЛУГИ ПО ПОДКЛЮЧЕНИЮ К СЕТИ ИНТЕРНЕТ) ПРЕДЛАГАЕТ ТРИ ТАРИФНЫХ ПЛАНА. ПОЛЬЗОВАТЕЛЬ ПЛАНИРУЕТ, ЧТО ЕГО ТРАФИК СОСТАВИТ 900 МБ И, ИСХОДЯ ИЗ ЭТОГО, ВЫБИРАЕТ НАИБОЛЕЕ ДЕШЕВЫЙ ТАРИФНЫЙ ПЛАН.
СКОЛЬКО РУБЛЕЙ ДОЛЖЕН ЗАПЛАТИТЬ ПОЛЬЗОВАТЕЛЬ В МЕСЯЦ, ЕСЛИ ЕГО ТРАФИК ДЕЙСТВИТЕЛЬНО БУДЕТ РАВЕН 900 МБ?

1-Й ЭТАП: СОСТАВИТЬ СВОЮ ТАБЛИЦУ И ПРОИЗВЕСТИ ВЫЧИСЛЕНИЯ.

А в этом задании, в качестве примера, сделаем свою «схему происходящего».
Может получиться, например, следующее (рис. 4.3).

2-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ СДЕЛАННЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ.

Необходимо 900 Мб

„0"	—	3,5·900 = 3150р.	3150
„700"	750р. „по-любому"	(900-700)·3 = 600р. дополнительно до 900	1350
„1000"	1050р. „по-любому"	—	1050 :)

Рисунок 4.3

3-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

1	*0*	*5*	0				

В4.4. СЕМЬЯ ИЗ ТРЕХ ЧЕЛОВЕК ЕДЕТ ИЗ МОСКВЫ В ЧЕБОКСАРЫ. МОЖНО ЕХАТЬ ПОЕЗДОМ, А МОЖНО – НА СВОЕЙ МАШИНЕ. БИЛЕТ НА ПОЕЗД СТОИТ 790 РУБЛЕЙ НА ОДНОГО ЧЕЛОВЕКА. АВТОМОБИЛЬ РАСХОДУЕТ 13 ЛИТРОВ БЕНЗИНА НА 100 КИЛОМЕТРОВ ПУТИ, РАССТОЯНИЕ ПО ШОССЕ РАВНО 700 КМ, А ЦЕНА БЕНЗИНА РАВНА 19 РУБ. ЗА ЛИТР.
СКОЛЬКО РУБЛЕЙ ПРИДЕТСЯ ЗАПЛАТИТЬ ЗА НАИБОЛЕЕ ДЕШЕВУЮ ПОЕЗДКУ НА ТРОИХ?

1-Й ЭТАП: НАРИСОВАТЬ СВОЮ СХЕМУ И ПРОИЗВЕСТИ ВЫЧИСЛЕНИЯ.

Опять же пробуем нарисовать что-нибудь простое и понятное (рис. 4.4).

2-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ СДЕЛАННЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ.

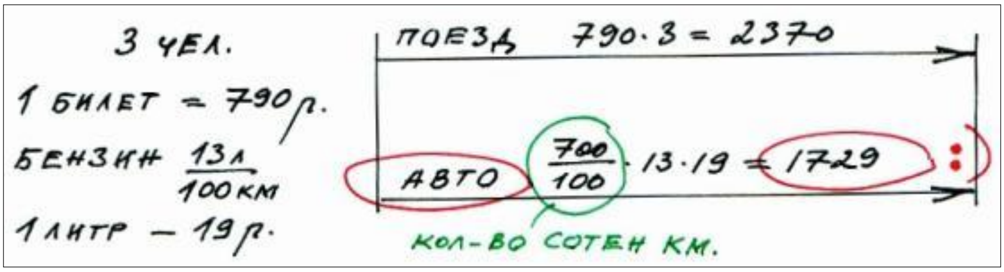


Рисунок 4.4

3-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

1	7	2	9				

В4.5. КЛИЕНТ ХОЧЕТ АРЕНДОВАТЬ АВТОМОБИЛЬ НА СУТКИ ДЛЯ ПОЕЗДКИ ПРОТЯЖЕННОСТЬЮ 600 КМ. В ТАБЛИЦЕ (РИС. 5.4А) ПРИВЕДЕНЫ ХАРАКТЕРИСТИКИ ТРЕХ АВТОМОБИЛЕЙ И СТОИМОСТЬ ИХ АРЕНДЫ. ПОМИМО АРЕНДЫ КЛИЕНТ ОБЯЗАН ОПЛАТИТЬ ТОПЛИВО ДЛЯ АВТОМОБИЛЯ НА ВСЮ ПОЕЗДКУ. КАКУЮ СУММУ В РУБЛЯХ ЗАПЛАТИТ КЛИЕНТ ЗА АРЕНДУ И ТОПЛИВО, ЕСЛИ ВЫБЕРЕТ САМЫЙ ДЕШЕВЫЙ ВАРИАНТ?
ЦЕНА ДИЗЕЛЬНОГО ТОПЛИВА 18 РУБ. ЗА ЛИТР, БЕНЗИНА 21 РУБ. ЗА ЛИТР, ГАЗА 17 РУБ. ЗА ЛИТР.

1-Й ЭТАП: НАРИСОВАТЬ СВОЮ СХЕМУ И ПРОИЗВЕСТИ ВЫЧИСЛЕНИЯ.

У меня получился, например,такой вариант (рис. 4.5б).

Автомобиль	Топливо	Расход топлива на 100 км	Арендная плата за 1 сутки
1	Дизельное	4	3500
2	Бензин	7	3100
3	Газ	12	3100

Рисунок 4.5а

2-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ СДЕЛАННЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ.

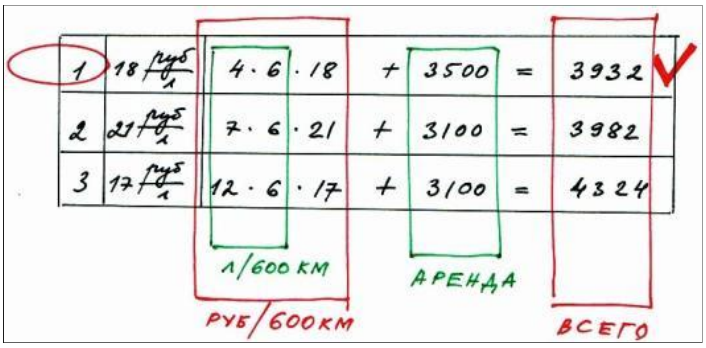


Рисунок 4.5б

3-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

3	*9*	*3*	*2*				

В4.6. ДЛЯ СТРОИТЕЛЬСТВА ГАРАЖА МОЖНО ИСПОЛЬЗОВАТЬ ОДИН ИЗ ДВУХ ТИПОВ ФУНДАМЕНТА: БЕТОННЫЙ ИЛИ ФУНДАМЕНТ ИЗ ПЕНОБЛОКОВ. ДЛЯ ФУНДАМЕНТА ИЗ ПЕНОБЛОКОВ НЕОБХОДИМО 5 КУБОМЕТРОВ ПЕНОБЛОКОВ И 2 МЕШКА ЦЕМЕНТА. ДЛЯ БЕТОННОГО ФУНДАМЕНТА НЕОБХОДИМО 4 ТОННЫ ЩЕБНЯ И 40 МЕШКОВ ЦЕМЕНТА. КУБОМЕТР ПЕНОБЛОКОВ СТОИТ 2400 РУБЛЕЙ, ЩЕБЕНЬ СТОИТ 640 РУБЛЕЙ ЗА ТОННУ, А МЕШОК ЦЕМЕНТА СТОИТ 240 РУБЛЕЙ. СКОЛЬКО РУБЛЕЙ БУДЕТ СТОИТЬ МАТЕРИАЛ, ЕСЛИ ВЫБРАТЬ НАИБОЛЕЕ ДЕШЕВЫЙ ВАРИАНТ?

1-Й ЭТАП: НАРИСОВАТЬ СВОЮ СХЕМУ И ПРОИЗВЕСТИ ВЫЧИСЛЕНИЯ.

Получается, например, такой вариант (рис. 4.6).

Из таблицы видно, что стоимость вариантов строительства такова:

Для бетона
$40 \cdot 240 + 4 \cdot 640 = 12160$

Для пеноблоков
$5 \cdot 2400 + 2 \cdot 240 = 12480$

Выбираем более дешевый вариант: 12160.

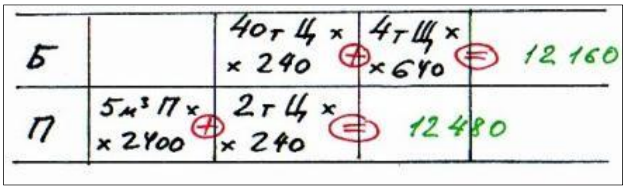


Рисунок 4.6

2-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ СДЕЛАННЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ.

3-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

1	*2*	*1*	*6*	*0*			

B4.7. ОТ ДОМА ДО ДАЧИ МОЖНО ДОЕХАТЬ НА АВТОБУСЕ, НА ЭЛЕКТРИЧКЕ ИЛИ НА МАРШРУТНОМ ТАКСИ. В ТАБЛИЦЕ ПОКАЗАНО ВРЕМЯ, КОТОРОЕ НУЖНО ЗАТРАТИТЬ НА КАЖДЫЙ УЧАСТОК ПУТИ. КАКОЕ НАИМЕНЬШЕЕ ВРЕМЯ ПОТРЕБУЕТСЯ НА ДОРОГУ? ОТВЕТ ДАЙТЕ В ЧАСАХ (РИС. 4.7).

1-Й ЭТАП: ПРОИЗВЕСТИ ВЫЧИСЛЕНИЯ.

Поскольку в задаче таблица уже дана, достаточно выполнить построчный подсчет времени, переводя его для удобства в минуты.
Получится следующее.

Автобус: $20 + 125 + 10 = 155$ (минут)

Электричка: $25 + 105 + 20 = 150$ (минут)

Маршрутка: $25 + 95 + 40 = 160$ (минут)

Выбираем наименьшее время и переводим его в часы:

$150 = 2 \cdot 60 + 30 = 2$ч 30 мин $= 2{,}5$час.

	1	2	3
1. Автобус	От дома до автобусной станции — 20 мин	Автобус в пути 2 ч 5 мин	От остановки автобуса до дачи пешком 10 мин
2. Электричка	От дома до станции железной дороги — 25 мин	Электричка в пути 1 ч 45 мин	От станции до дачи пешком 20 мин
3. Маршрутное такси	От дома до остановки маршрутного такси — 25 мин	Маршрутное такси в дороге 1 ч 35 мин	От остановки маршрутного такси до дачи пешком 40 мин

Рисунок 4.7

2-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ СДЕЛАННЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ.

3-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

2	*,*	*5*					

Задания В4, конечно же, могут быть и более разнообразными.
В чем легко можно убедиться, зайдя в «Открытый банк заданий по математике».

Но общий подход к их решению остается прежним.

ЕГЭ-2012: ЗАДАНИЕ B5

Еще одна возможность заработать один легкий балл – решить уравнение, которое предлагает задание B5 («найдите корень уравнения»).
Предлагаемое на ЕГЭ уравнение, судя по всему, будет относиться к одному из 3-х типов:

1) **Показательное** (например, $\left(\frac{1}{3}\right)^{x-12} = \frac{1}{9}$).
   В этих уравнениях x находится в показателе степени, то есть «наверху»;
2) Уравнение, содержащее **корень** (например, $\sqrt{2x+7} = 5$).
   В этих уравнениях x находится под знаком корня;
3) **Логарифмическое** (например, $\log_2(8-x) = 4$).
   Эти уравнения, как следует из названия, содержат так называемые «логарифмы», и x находится «под знаком логарифма».

Раздел, посвященный заданию B5, получится довольно большим, так как придется подробно рассматривать решение уравнений всех 3-х типов. Но придется потерпеть – не отказываться же из-за этого от возможности «срубить» балл на столь раннем этапе ЕГЭ!

Для того, чтобы при чтении не нужно было отвлекаться на справочники и учебники (а ведь искать их, а потом листать, а потом еще и разбираться в написанном так не хочется ☺), в этом Пособии были задуманы специальные Тематические Отступления.
А это еще дополнительный объем для чтения.

В этих Отступлениях содержится теоретическая информация, минимально необходимая для понимания и выполнения заданий по обсуждаемой теме.
Причем, без лишнего мусора – то есть всевозможных определений, доказательств и ненужных рассуждений.

Более того, в этих Отступлениях порой специально искажается и огрубляется математическая суть разбираемой темы. И причина этого проста – иногда проще и правильнее «тупо сделать» не понимая тонкостей, чем тратить время и силы на доскональное понимание. Подобно тому, как многие люди вполне успешно работают на компьютере, не зная принципов его работы. А тем более – компьютерного «железа».

И вот – для поддержания умственного тонуса – и первое Тематическое Отступление, связанное с показательными уравнениями.

ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ОТСТУПЛЕНИЕ №1: «СТЕПЕНИ ЧИСЕЛ»

Освежим память когда-то знакомыми сведениями.

Как известно, степени чисел могут быть целыми и дробными, положительными и отрицательными. Кратко напомним об этом конкретными примерами.

1) Целая положительная степень (то есть 1, 2, 3 … и так далее).

$2^2 = 2 \cdot 2 = 4$

$2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32,$

$5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$

$10^1 = 10$

2) Целая отрицательная степень (то есть -1, -2, -3 … и так далее).

$2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$

$2^{-5} = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}$

$5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125}$

$10^{-1} = \frac{1}{10^1} = \frac{1}{10}$

В общем случае, $\boldsymbol{a^{-n} = \frac{1}{a^n}}$.

3) Дробная положительная степень.

$4^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{4} = \sqrt{4} = 2$

$8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2$

$81^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{81} = 3$

В числителе дроби не обязательно должна стоять 1.
В этом случае число нужно понимать так:

$4^{\frac{3}{2}} = \sqrt{4^3}$

$8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4$

$81^{\frac{5}{4}} = \sqrt[4]{81^5}$ и так далее.

4) Дробная отрицательная степень. Здесь получается комбинация пунктов b) и c).

$$4^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{4^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}$$

$$4^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{4^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{4^3}} = \frac{1}{\sqrt{64}} = \frac{1}{8}$$

и так далее…
Вместе с тем, многие числа, возведенные в дробную степень, не могут быть выражены в виде целых чисел (и даже простых дробей).

Например, $5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}, 20^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{20}$.
В этих случаях их именно так и записывают, без дальнейшего вычисления.

5) Любое число в нулевой степени равно 1.

$4^0 = 1, 10^0 = 1$ и так далее.

6) 1 в любой степени равно 1.

$1^5 = 1, 1^{-2} = 1,$ $1^{99} = 1$ и так далее.

Следующий набор Правил показывает, какие действия можно выполнять с двумя и более числами, имеющими степени (то есть любыми числами, указанными в пунктах a) – f)).
Обратите внимание, что умножать и делить друг на друга можно только числа с одинаковыми основаниями!
Этот набор формул – Правил, позволяющий «собирать и разбирать» выражения, содержащие степень, я называю «Показательным конструктором»:

1) $\boldsymbol{a^n \cdot a^m = a^{n+m}}$

Например, $3^2 \cdot 3^3 = 3^{2+3} = 3^5$

2) $\boldsymbol{\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}}$

Например, $\frac{3^3}{3^2} = 3^{3-2} = 3^1 = 3$

3) $\boldsymbol{(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n}$

Например, $(2 \cdot 3)^4 = 2^4 \cdot 3^4$

4) $\boldsymbol{\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}}$

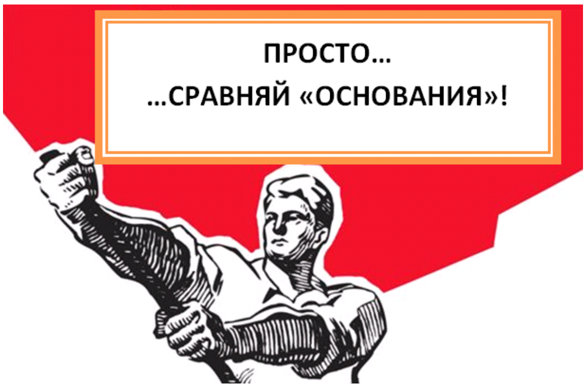
Например, $\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2^4}{3^4}$

5) $(\boldsymbol{a^n})^{\boldsymbol{m}} = \boldsymbol{a^{n \cdot m}}$

Например, $(2^3)^4 = 2^{3 \cdot 4} = 2^{12}$

Вот такое получилось Отступление №1 – занимательное и бодрящее ☺.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ПОКАЗАТЕЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ



B5.1. НАЙДИТЕ КОРЕНЬ УРАВНЕНИЯ

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{x-12} = \frac{1}{9}$$

Показательные уравнения удобно решать по следующей простой схеме.

1-Й ЭТАП: ПРИВЕСТИ ОБЕ ЧАСТИ УРАВНЕНИЯ К ОДИНАКОВЫМ ОСНОВАНИЯМ.

В принципе, можно приводить левое основание к правому, правое к левому или оба основания к какому-либо третьему. А выбирать нужно тот вариант приведения, который проще с точки зрения вычислений. Зачем создавать себе лишние трудности? Здесь удобнее поработать с правой частью:

$$\frac{1}{9} = \frac{1}{3^2} = \frac{1^2}{3^2} = \left(\frac{1}{3}\right)^2$$

Тогда уравнение будет выглядеть так: $\left(\frac{1}{3}\right)^{x-12} = \left(\frac{1}{3}\right)^2$

2-Й ЭТАП: ПРИРАВНЯТЬ «ВЕРХУШКИ», ТО ЕСТЬ СТЕПЕНИ.

$x - 12 = 2; \quad x = 2 + 12 = 14$

3-ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПОЛУЧЕННЫЙ КОРЕНЬ (КОРНИ).

Подставляем $x = 14$ в исходное уравнение и проверяем, будут ли равны обе части уравнения

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{14-12} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$$

Действительно, при $x = 14$, левая часть уравнения равна правой.

4-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

1	***4***						

B5.2. НАЙДИТЕ КОРЕНЬ УРАВНЕНИЯ $\mathbf{4^{5x-13}=\frac{1}{64}}$.

1-Й ЭТАП: ПРИВЕСТИ ОБЕ ЧАСТИ УРАВНЕНИЯ К ОДИНАКОВЫМ ОСНОВАНИЯМ.

Проще преобразовать правую часть уравнения к основанию 4:

$$\frac{1}{64}=\frac{1}{4^3}=4^{-3}$$

Тогда уравнение будет выглядеть так:

$$4^{5x-13}=4^{-3}$$

2-Й ЭТАП: ПРИРАВНЯТЬ «ВЕРХУШКИ», ТО ЕСТЬ СТЕПЕНИ.

$$5x - 13 = -3$$

$$5x = -3 + 13 = 10$$

$$x = {}^{10}/_{5} = 2$$

3-ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПОЛУЧЕННЫЙ КОРЕНЬ (КОРНИ).

$$4^{5\cdot 2-13}=4^{10-13}=4^{-3}=\frac{1}{4^3}=\frac{1}{64}$$

Проверка показала, что корень $x = 2$ найден правильно.

4-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

2							

B5.3. НАЙДИТЕ КОРЕНЬ УРАВНЕНИЯ

$$\left(\frac{1}{8}\right)^{x-12} = 64$$

1-Й ЭТАП: ПРИВЕСТИ ОБЕ ЧАСТИ УРАВНЕНИЯ К ОДИНАКОВЫМ ОСНОВАНИЯМ.

В этом примере лучше преобразовать обе части уравнения к основанию 8.
С учетом того, что $\frac{1}{8} = 8^{-1}$, а $64 = 8^2$, получим такое уравнение:

$(8^{-1})^{x-12} = 8^2$

$8^{-x+12} = 8^2$

2-Й ЭТАП: ПРИРАВНЯТЬ «ВЕРХУШКИ», ТО ЕСТЬ СТЕПЕНИ.

$-x + 12 = 2$

$x = 12 - 2 = 10$

3-ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПОЛУЧЕННЫЙ КОРЕНЬ (КОРНИ).

$\left(\frac{1}{8}\right)^{10-12} = \left(\frac{1}{8}\right)^{-2} = {}^{1}\!\Big/\!\left(\frac{1}{8}\right)^{2} = 64$

Уравнение решено правильно.

4-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

1	***0***						

А теперь перейдем ко второму типу уравнений, ожидаемых в задании B5.

УРАВНЕНИЯ, СОДЕРЖАЩИЕ КОРЕНЬ

Судя по всему, в задании B5 может встретиться как корень 2-й степени (обычный «квадратный» корень, то есть $\sqrt{\ }$), так и корень 3-й степени, то есть $\sqrt[3]{\ }$.

B5.4. НАЙДИТЕ КОРЕНЬ УРАВНЕНИЯ $\sqrt{2x+7} = 9$.

Уравнения такого типа удобно решать по следующей простой схеме.

1-Й ЭТАП: ВОЗВЕДЕНИЕ ОБЕИХ ЧАСТЕЙ УРАВНЕНИЯ В КВАДРАТ (ТО ЕСТЬ ВО 2-Ю СТЕПЕНЬ) ДЛЯ ТОГО, ЧТОБЫ ИЗБАВИТЬСЯ ОТ КОРНЯ.

$$\left(\sqrt{2x+7}\right)^2 = 9^2$$

$$2x + 7 = 81$$

$$2x = 81 - 7 = 74$$

$$x = 74/2 = 37$$

2-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПОЛУЧЕННЫЙ КОРЕНЬ.

$$\sqrt{2 \cdot 37 + 7} = \sqrt{74 + 7} = \sqrt{81} = 9$$

И действительно, при $x = 37$ левая часть уравнения равна правой части.

3-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

3	*7*						

B5.5. НАЙДИТЕ КОРЕНЬ УРАВНЕНИЯ $\sqrt{\frac{2x+53}{7}} = \mathbf{11}$.

1-Й ЭТАП: ВОЗВЕДЕНИЕ ОБЕИХ ЧАСТЕЙ УРАВНЕНИЯ В КВАДРАТ
(ТО ЕСТЬ ВО 2-Ю СТЕПЕНЬ).

$$\left(\sqrt{\frac{2x+53}{7}}\right)^2 = 11^2$$

$$\frac{2x+53}{7} = 121$$

$2x + 53 = 121 \cdot 7 = 847$

$2x = 847 - 53 = 794$

$x = 794/2 = 397$

2-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПОЛУЧЕННЫЙ КОРЕНЬ (КОРНИ).

$$\sqrt{\frac{2\cdot397+53}{7}} = \sqrt{\frac{847}{7}} = \sqrt{121} = 11$$

Именно так и должна выполняться качественная проверка полученного результата.
То есть «по-взрослому» ☺!

3-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

3	***9***	***7***					

B5.6. НАЙДИТЕ КОРЕНЬ УРАВНЕНИЯ

$$\sqrt{\frac{\mathbf{6}}{\mathbf{5x-34}}}=\frac{1}{11}$$

1-Й ЭТАП: ВОЗВЕДЕНИЕ ОБЕИХ ЧАСТЕЙ УРАВНЕНИЯ В КВАДРАТ (ТО ЕСТЬ ВО 2-Ю СТЕПЕНЬ).

$$\left(\sqrt{\frac{6}{5x-34}}\right)^2=\left(\frac{1}{11}\right)^2$$

$$\frac{6}{5x-34}=\frac{1}{121}$$

Примечание.
Для дальнейшего преобразования такого рода заданий B3 можно воспользоваться известным приемом, который показан на рис. 5.1.
В пропорции (то есть равенстве вида $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$) любое из входящих в нее чисел удобно находить именно таким способом, который будет пояснен ниже.

В нашем примере

$$5x-34=\frac{6\cdot 121}{1}=726$$

$$5x=726+34=760$$

$$x=760/5=152$$

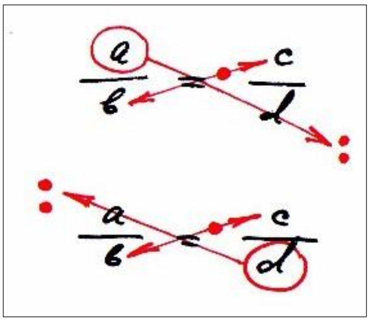


Рисунок 5.1

2-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПОЛУЧЕННЫЙ КОРЕНЬ (КОРНИ).

Все вычисления этого этапа выполняем, не глядя на вычисления, сделанные ранее!

$$\sqrt{\frac{6}{5\cdot 152-34}}=\sqrt{\frac{1}{121}}=\frac{1}{11}$$

3-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

1	*5*	*2*					

И еще один пример – решения уравнения с корнем 3-й степени.

B5.7. НАЙДИТЕ КОРЕНЬ УРАВНЕНИЯ $\sqrt[3]{x-2}=5.$

1-Й ЭТАП: ВОЗВЕДЕНИЕ ОБЕИХ ЧАСТЕЙ УРАВНЕНИЯ В 3-Ю СТЕПЕНЬ.

Именно так: раз в уравнении корень 3-й степени, то в нее и нужно возводить.

$\left(\sqrt[3]{x-2}\right)^3=5^3$

$x-2=5\cdot5\cdot5=125$

$x=125+2=127$

2-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПОЛУЧЕННЫЙ КОРЕНЬ (КОРНИ).

$\sqrt[3]{127-2}=\sqrt[3]{125}=5$

3-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

1	***2***	***7***					

Вот так, «совсем не больно» и решаются уравнения с корнем в заданиях B5.
И теперь остается лишь немного поговорить о так называемых «логарифмах» (умный вид приветствуется!), и связанных с ними уравнениях на предстоящем ЕГЭ.

ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Для того, кто не хочет (или по разным причинам не может) досконально разбираться, что такое логарифмы, можно предложить такую систему работы.

Во-первых, прочитать Отступление №2. И «тупо заучить» упомянутые там формулы их многократным написанием, не особо задумываясь над их происхождением.

Во-вторых, разобраться с приведенными примерами решения логарифмических уравнений, после чего самостоятельно решить как можно больше подобных уравнений по предложенной схеме.

А если ковыряться в теории совсем уж лень – тогда можно попробовать ограничиться только внимательным (!) разбором примеров. Может быть, хватит и этого.

ОТСТУПЛЕНИЕ №2: «НЕМНОГО О ЛОГАРИФМАХ»

ЛОГАРИФМЫ – ЧТО ЭТО?

В математике придумано много странных вещей. И среди них – так называемые «логарифмы».
Логарифмы – это обыкновенные числа, которые записываются не привычными цифрами, а странным, зашифрованным способом.
Иными словами, число прямо не называется (например: 1, 2, 3, -1, -2, -3), а «кодируется» с помощью специальной записи.
Запись эта выглядит так: буквы «log», после них два числа – одно мелким шрифтом и снизу (подстрочное), второе – справа от первого и обычного размера.
Например: $\log_2 16, \log_5 25, \log_{\frac{1}{2}} 8$ и так далее.

Численное значение некоторых логарифмов можно найти («расшифровать»).
Или совсем легко, или с небольшими усилиями.
Самый простой способ это сделать – применить прием, который для простоты назовем «крутилкой» (рис. 5.2), смысл которой будет понятен из примеров.

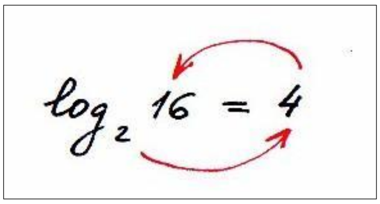


Рисунок 5.2

Пример 1. $\log_2 16 = x$
«Крутилка», которая изображается в виде 2-х стрелок, создающих впечатление некоего вращения, в этом примере обозначает следующее: $2^x = 16$.
Значение x можно легко подобрать – это число «4» (так как $2^4 = 16$).
Таким образом, $\log_2 16 = 4$.

Пример 2. $\log_5 25 = x$
Опять «расшифровка» этого числа выполняется тем же способом: $5^x = 25$.
Очевидно, что $x = 2$, значит $\log_5 25 = 2$.

Пример 3. $\log_{\frac{1}{2}} 8 = x$
В этом случае «расшифровка» такова:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x = 8$$

Здесь случай немного сложнее, так как нужно будет решить показательное уравнение.

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x = (2^{-1})^x = 2^{-x} = 8 = 2^3$$

$$2^{-x} = 2^3$$

$$-x = 3$$

$$x = -3$$

Таким образом, $\log_{\frac{1}{2}} 8 = -3$, что означает $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 8$.

Пример 4. $\log_{27} 3 = x$

$27^x = 3$

$(3^3)^x = 3^1$

$3^{3x} = 3^1$

$3x = 1$

$$x = \frac{1}{3}$$

Таким образом, $\log_{27} 3 = \frac{1}{3}$.

Пример 5. $\log_{\frac{1}{7}} \frac{1}{49} = x$

$$\left(\frac{1}{7}\right)^x = \frac{1}{49} = \left(\frac{1}{7}\right)^2$$

$x = 2$

Таким образом, $\log_{\frac{1}{7}} \frac{1}{49} = 2$.

Выше были специально подобраны такие логарифмы, значения которых находятся довольно легко. И эти найденные значения имеют простой вид – целые числа или простые дроби.

Но можно придумать или найти примеры таких логарифмов, значения которых невозможно вычислить «вручную».

Пример 6. $\log_2 5 = x$

$2^x = 5$

В этом примере нельзя подобрать значение x.
Ясно только, что $2 < x < 3$ (так как $2^2 = 4$ – «недолет», а $2^3 = 8$ – «перелет»).
Нельзя вычислить x и решением показательного уравнения (как в Примерах 3,4,5), поскольку обе части уравнения $2^x = 5$ невозможно привести к одинаковому основанию.

В подобных случаях эти числа именно так окончательно и записывают, не называя прямо их значения: $\log_2 5$, $\log_3 7$, $\log_3 7$.

И такая запись означает:
$\log_2 5$ – «та степень, в которую нужно возвести 2, чтобы получить 5»,
$\log_4 52$ – «та степень, в которую нужно возвести 4, чтобы получить 52», и так далее.

ЛОГАРИФМЫ: «ИНСТРУКЦИЯ ПО ПРИМЕНЕНИЮ»

Этот блок Отступления окажется, в некотором смысле, сложнее предыдущего, потому что его недостаточно только прочитать. Его, как говорилось ранее, нужно «тупо заучить».
Но не просто глядя на него – так не получится, а написав по памяти много раз
(да знаю, знаю как не хочется это делать ☺).

Может возникнуть вопрос – а почему именно тупо заучить, а может лучше разобраться с этим как следует? А потому – что так сделать проще! Если вы еще не разобрались с этим, учась в школе – сейчас уже некогда. А может быть, и незачем.

А теперь перейдем к тем самым формулам, которые предстоит запомнить.
Набор этих формул – Правил можно назвать «логарифмическим конструктором», потому что они похожи на набор инструментов для работы с логарифмами. С помощью этого «конструктора» с ними и производятся перечисленные ниже действия (и только они!).
Подобно этому, ранее мы говорили о «показательном конструкторе», с помощью которого работают с числами, возведенными в степень.

Итак, с логарифмами, с этими забавными «зашифрованными» числами, можно выполнять следующие действия:

1) $\boldsymbol{log_a(x_1 \cdot x_2) = log_a x_1 + log_a x_2}$

2) $\boldsymbol{log_a\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = log_a x_1 - log_a x_2}$

3) $\boldsymbol{log_a x^p = p\, log_a x = log_a x^p}$

4) $\boldsymbol{log_{a^p} x = \frac{1}{p} log_a x = log_{a^p} x}$

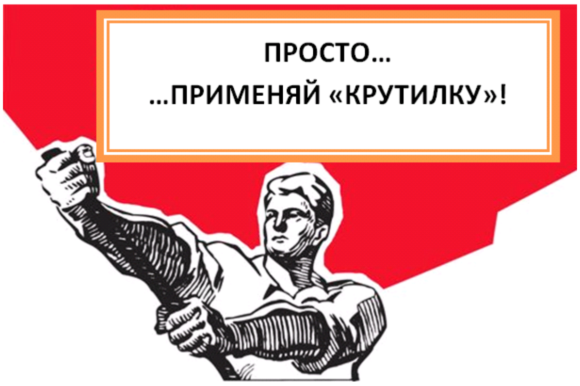
Примечание.
На самом деле существуют и другие формулы «конструктора», но в заданиях B5 они вряд ли могут встретиться.
Кроме этих формул, которые описывают действия над логарифмами, нужно помнить так называемое «основное логарифмическое тождество»: $a^{log_a x} = x$
(например, $3^{log_3 7} = 7$, $8^{log_8 23} = 23$ и так далее).
Задания на его применение встречаются довольно часто в разделе B7. Поэтому его нужно хорошо зрительно помнить, и уметь распознавать выражения, похожие на него.
Подробнее об этом – в разделе B7.

И ЕЩЕ ОДНА ОСОБЕННОСТЬ ЛОГАРИФМОВ

И последний момент, которым заканчивается Отступление №2, и который нужно запомнить: «начинка» логарифмов, то есть «большое число справа» всегда должно быть больше нуля (с точки зрения «правильной математики» нужно всегда проверять полученные корни логарифмических уравнений).
Хотя в уравнениях B5 корень только один – и он, понятное дело, не может быть отсеян в результате проверки. Ведь что-то же должно быть записано в ответ!

А теперь, после такой зажигательной и нереально любопытной теории – «долгожданные» примеры логарифмических уравнений ☺.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ



B5.8. НАЙДИТЕ КОРЕНЬ УРАВНЕНИЯ $\log_5(12-3x)=2+\log_5 3$.

Решение подобных уравнений удобно разбивать на следующие этапы.

1-Й ЭТАП: ПРИВЕСТИ УРАВНЕНИЕ К ВИДУ $\boldsymbol{log_a f(x)}=$ ЧИСЛО.

$$\log_5(12-3x)-\log_5 3=2$$

$$\log_5\frac{(12-3x)}{3}=2$$

(для преобразования использовалась формула 2 «конструктора»).

2-Й ЭТАП: ПРИМЕНИТЬ «КРУТИЛКУ» И НАЙТИ ЗНАЧЕНИЕ $\boldsymbol{x}$.

$$5^2=\frac{(12-3x)}{3}$$

$$25=\frac{(12-3x)}{3}$$

$$12-3x=75$$

$$3x=-63; \quad x=-21$$

А на вопрос «правильно ли то, что мы нашли?», отвечает 3-й этап.

3-Й ЭТАП: ПРОВЕРКА ПРАВИЛЬНОСТИ КОРНЯ.

$\log_5\big(12-3\cdot(-21)\big)=\log_5(12+63)=\log_5 75$ – правильно.

Причем, при $x=-21$ "начинка" левой части исходного уравнения больше нуля (как и должно быть).

4-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

-	*2*	*1*					

B5.9. НАЙДИТЕ КОРЕНЬ УРАВНЕНИЯ $\log_2(6-x)=4$.

1-Й ЭТАП: ПРИВЕСТИ УРАВНЕНИЕ К ВИДУ $\log_a f(x)=$ ЧИСЛО.

Исходное уравнение уже имеет нужный вид.

2-Й ЭТАП: ПРИМЕНИТЬ «КРУТИЛКУ» И НАЙТИ ЗНАЧЕНИЕ x.

$2^4 = 6 - x$

$x = 6 - 16 = -10.$

3-Й ЭТАП: ПРОВЕРКА ПРАВИЛЬНОСТИ КОРНЯ.

$\log_2\big(6-(-10)\big)=4$

$\log_2 16 = 4$ – правильно.

4-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

-	***1***	***0***					

B5.10. НАЙДИТЕ КОРЕНЬ УРАВНЕНИЯ $\log_{\frac{1}{4}}(12-x)=-3$.

1-Й ЭТАП: ПРИВЕСТИ УРАВНЕНИЕ К ВИДУ $\log_a f(x)=$ ЧИСЛО.

Исходное уравнение уже имеет нужный вид.

2-Й ЭТАП: ПРИМЕНИТЬ «КРУТИЛКУ» И НАЙТИ ЗНАЧЕНИЕ x.

$\left(\frac{1}{4}\right)^{-3} = 12 - x$

С учетом того, что $\left(\frac{1}{4}\right)^{-3} = {}^{1}\!\big/\!\left(\frac{1}{4}\right)^{3} = 4^3 = 64$, запишем предыдущее уравнение так:

$12 - x = 64;\ x = 12 - 64 = -52$

3-Й ЭТАП: ПРОВЕРКА ПРАВИЛЬНОСТИ КОРНЯ.

$\log_{\frac{1}{4}}\big(12-(-52)\big) = \log_{\frac{1}{4}} 64 = \log_{4^{-1}} 4^3 = -1\cdot 3\log_4 4 = -3$

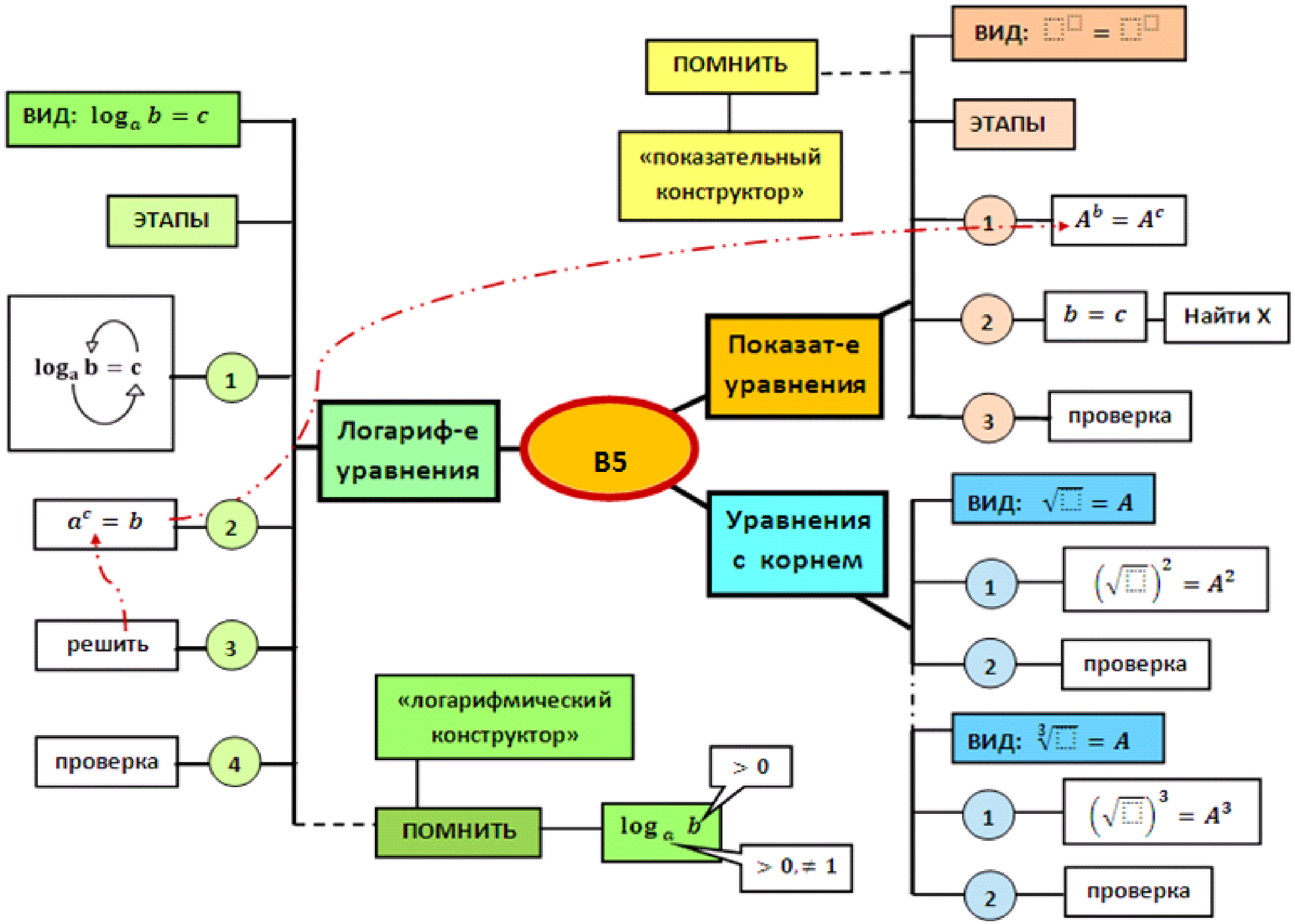
При $x = -52$ левая часть уравнения больше нуля (так и должно быть). Корень подходит.

4-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

-	***5***	***2***					

Думаю, что приведенных примеров будет достаточно для успешного освоения заданий В5.
Тем более, что эта глава получилась и так вынужденно большая (ее краткий конспект представлен в виде рисунка на следующей странице).

Как всегда, для самостоятельного «набивания руки» воспользуйтесь «Открытым банком заданий по математике».


ВИД: $\log_a b = c$
ЭТАПЫ
$\log_a b = c$
1
$a^c = b$
2
решить
3
проверка
4
Логариф-е уравнения
B5
«логарифмический конструктор»
ПОМНИТЬ
$\log_a b$
> 0
$> 0, \neq 1$
ПОМНИТЬ
«показательный конструктор»
ВИД: $\square^{\square} = \square^{\square}$
ЭТАПЫ
1
$A^b = A^c$
2
$b = c$
Найти X
3
проверка
Показат-е уравнения
Уравнения с корнем
ВИД: $\sqrt{\square} = A$
1
$\left(\sqrt{\square}\right)^2 = A^2$
2
проверка
ВИД: $\sqrt[3]{\square} = A$
1
$\left(\sqrt{\square}\right)^3 = A^3$
2
проверка

ЕГЭ-2012: ЗАДАНИЕ B6

Задания B6 – это одно из немногих мест части B экзамена, где встречаются элементы тригонометрии и планиметрии («плоской геометрии»).

Как правило, эти задания довольно однотипны и просты, и при минимальной подготовке к ним не вызывают больших трудностей. Хотя, конечно, могут случиться и неожиданности.

Минимальный объем сведений, который позволяет успешно решать большинство типовых заданий, сейчас будет представлен в очередном Тематическом Отступлении.

ОТСТУПЛЕНИЕ №3: «АЗБУКА ТРИГОНОМЕТРИИ»

1) С большой вероятностью можно ожидать, что большинство заданий B6 будет связано с прямоугольным треугольником.
А для их решения понадобится так называемая «теорема Пифагора». Ее суть состоит в том, что в любом прямоугольном треугольнике его стороны связаны следующим соотношением:
$c^2 = a^2 + b^2$ (рис.6а).
В этой формуле длина гипотенузы обозначена буквой c, а катеты – буквами a и b.

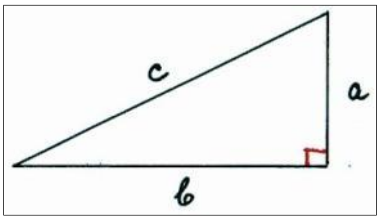


Рисунок 6а

2) Во многих заданиях упоминаются тригонометрические функции: синус, косинус, тангенс, котангенс. Не обсуждая подробно многие моменты, связанные с этими функциями, ограничимся только самым необходимым.
А именно: все эти функции можно определить как отношения длин сторон в прямоугольном треугольнике.
В качестве иллюстрации рассмотрим некоторый наугад нарисованный прямоугольный треугольник (рис. 6б). И смысл тригонометрических функций поясним на примере угла А.
Тригонометрические функции, которые являются отношением определенных двух сторон прямоугольного треугольника, показаны стрелками.

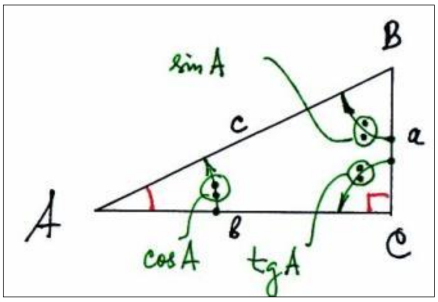


Рисунок 6б

Итак, $sinA = {}^{a}/_{c}$ (отношение противолежащего катета к гипотенузе),
$cosA = {}^{b}/_{c}$ (отношение прилежащего катета к гипотенузе),
$tgA = {}^{a}/_{b}$ (отношение прилежащего катета к противолежащему),
$ctgA = {}^{b}/_{a}$ (отношение противолежащего катета к прилежащему).

Прилежащим называется катет, который «прилежит», то есть «находится рядом» с рассматриваемым углом. Противолежащим – катет, находящийся «напротив» угла.
Если буквенные обозначения сторон сделать другими, то это приведет только к другой записи тригонометрических функций. А отношение сторон будет тем же самым.
Помимо этой информации, полезно помнить, что тангенс и котангенс угла можно выразить не только через отношения сторон треугольника, но и через синус и косинус этого же угла.
А именно: $tg\alpha = \sin\alpha / \cos\alpha$, $ctg\alpha = \cos\alpha / \sin\alpha$.

3) В большинстве задач упоминаются значения тригонометрических функций углов $30°$, $45°$ или $60°$. И их, естественно, нужно помнить. А чтобы их «было откуда запомнить» без листания справочников, приведем таблицу этих значений.

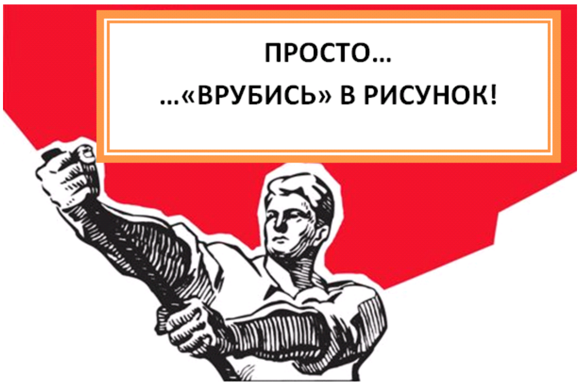
функция	30°	45°	60°
$\boldsymbol{sin}\alpha$	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$
$\boldsymbol{cos}\alpha$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$
$\boldsymbol{tg}\alpha$	$1/\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\boldsymbol{ctg}\alpha$	$\sqrt{3}$	1	$1/\sqrt{3}$

4) Не очень часто, но порой приходится пользоваться известным соотношением $(sin\,x)^2 + (cos\,x)^2 = 1$ («основное тригонометрическое тождество»).
Обычно эта формула используется для выражения из нее синуса или косинуса.
Если это проделать, то получится следующее:
$sin\,x = \pm\sqrt{1-(cos\,x)^2}$
$cos\,x = \pm\sqrt{1-(sin\,x)^2}$.
В большинстве заданий В6 (в которых, как правило, идет работа с острыми углами треугольника) синус и косинус будут положительны.
Но изредка встречаются тупые углы с величиной $90° < \alpha < 180°$, у которых значения синуса отрицательно, а косинуса – положительно.

5) Как вы, наверное, заметили, «под знаком» тригонометрической функции стоит угол, который может быть обозначен разными способами: А, α, x, y и так далее.

На этом можно и закончить это Отступление, такое краткое и почти приятное по сравнению с предыдущим ☺, и перейти к разбору примеров.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАНИЙ В6



B6.1. В ТРЕУГОЛЬНИКЕ ABC УГОЛ C РАВЕН $90°$, УГОЛ B РАВЕН $30°$, $BC = 3\sqrt{3}$. НАЙДИТЕ AC.

Для наиболее комфортного решения подобных заданий, можно предложить следующий порядок действий.

1-ЭТАП: РАБОТА С РИСУНКОМ.

На этом этапе нужно нанести на исходный рисунок все то, что дано в условии **+** то, что нужно найти.
Рекомендую использовать для этого разные цвета (которые очень «оживляют» рисунок и делают его по-настоящему понятным и полезным для работы).

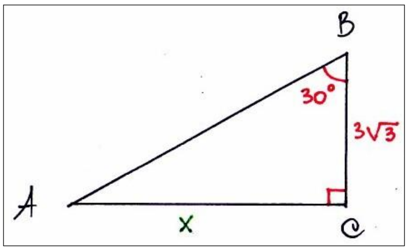


Рисунок 6.1

Для приведенного примера рисунок может быть, например, таким (рис. 6.1).

2-Й ЭТАП: ПОИСК НА РИСУНКЕ «ЗАЦЕПКИ» ДЛЯ ПОСЛЕДУЮЩЕГО РЕШЕНИЯ (ИЛИ ИСПОЛЬЗОВАНИЕ КАКОГО-НИБУДЬ ТИПОВОГО ПРИЕМА).

В нашем примере видно, что «участвовать» в решении будут угол B, стороны BC и AC (которые либо уже даны, либо должны быть найдены).
Очевидно, лучше всего выбрать такой сценарий:

$tg30° = \frac{x}{3\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ (табличное значение!),

$$x = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 3$$

3-Й ЭТАП: ПРОВЕРКА ПОЛУЧЕННОГО РЕЗУЛЬТАТА

Как всегда. Не бросаться же сразу записывать «3» в бланк ответов!
В данном случае, лучше всего решить задание заново, не подсматривая в первоначальный вариант. А перед этим – еще раз проверить правильность записи того, что дано в условии.

4-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

3							

Хорошо, если бы именно такое легкое задание попалось на ЕГЭ!

В6.2. В ТРЕУГОЛЬНИКЕ АВС УГОЛ С РАВЕН $90°$, $cosB = \frac{3}{5}$, $AB = 5$. НАЙДИТЕ АВ.

1-ЭТАП: РАБОТА С РИСУНКОМ.

Рисунок может, например, получиться таким (рис. 6.2).

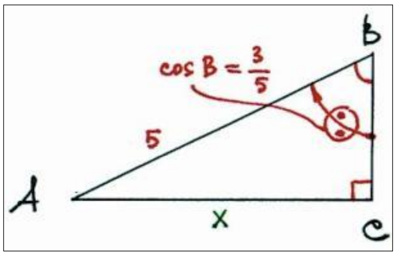


Рисунок 6.2

2-Й ЭТАП: РЕШЕНИЕ, СЛЕДУЮЩЕЕ ИЗ РАССМОТРЕНИЯ РИСУНКА.

На этом, и нескольких других примерах, можно показать применение простого и эффективного типового приема решения подобных заданий.
Его можно назвать **«Связкой»,** так как одновременно используются два соображения.

Первое: раз треугольник прямоугольный, то можно использовать теорему Пифагора.

Второе: раз в условии дано значение тригонометрической функции (или его нужно найти), то ее нужно расписать через отношение сторон данного в условии треугольника.

В этом примере «Связка» будет выглядеть так:

$cosB = \frac{3}{5} = \frac{\text{BC}}{5}$ (1)

$5^2 = x^2 + BC^2$ (2)

Итак, «Связка» записана. Далее можно использовать, например, такой «план действий»: из (1) найти BC и подставить в (2).

$$BC = \frac{3 \times 5}{5} = 3$$

$$5^2 = x^2 + 3^2$$

$$x^2 = 25 - 9 = 16$$

$$x = \pm\sqrt{16}$$

$x = \pm 4.$ По смыслу задания подходит только $x = 4.$

3-Й ЭТАП: ПРОВЕРКА ПОЛУЧЕННОГО РЕЗУЛЬТАТА.

Рецепт по проверке ответа тот же, что и в предыдущем задании.

4-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

4							

B6.3. В ТРЕУГОЛЬНИКЕ ABC УГОЛ C РАВЕН 90° , $AB = 30, AC = 6\sqrt{21}$. НАЙДИТЕ $sinA$.

1-ЭТАП: РАБОТА С РИСУНКОМ (РИС. 6.3).

2-Й ЭТАП: РЕШЕНИЕ, СЛЕДУЮЩЕЕ ИЗ РАССМОТРЕНИЯ РИСУНКА.

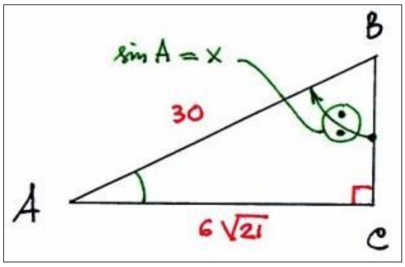


Рисунок 6.3

Применим знакомую «Связку»:

$x = sinA = \frac{\text{BC}}{30}$, то есть $x = \frac{\text{BC}}{30}$ (1)

$30^2 = \left(6\sqrt{21}\right)^2 + BC^2$ (2)

После записи «Связки» начинаем думать о дальнейших действиях.
Естественно, напрашивается такой вариант: из (2) найти BC и подставить в (1).

Итак,

$BC^2 = 30^2 - 36 \times 21 = 900 - 756 = 144$

$BC = \pm\sqrt{144} = \pm 12$. Оставляем $BC = 12$.

$x = \frac{12}{30} = \frac{4}{10} = 0{,}4$

3-Й ЭТАП: ПРОВЕРКА ПОЛУЧЕННОГО РЕЗУЛЬТАТА.

4-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

0	*,*	*4*					

В6.4. В ТРЕУГОЛЬНИКЕ АВС УГОЛ С РАВЕН $90°$, $AB = 182$, $AC = 70$. НАЙДИТЕ tgA.

1-ЭТАП: РАБОТА С РИСУНКОМ (РИС. 6.4).

2-Й ЭТАП: РЕШЕНИЕ, НАХОДИМОЕ ИЗ РАССМОТРЕНИЯ РИСУНКА.

$tgA = x = \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AC}} = \frac{\mathrm{BC}}{70}$, то есть $x = \frac{\mathrm{BC}}{70}$ (1)

$182^2 = 70^2 + BC^2$ (2)

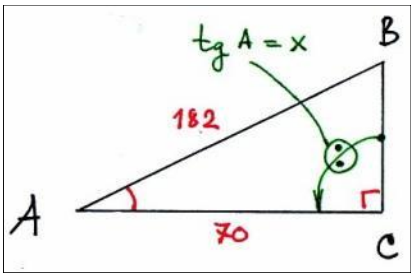


Рисунок 6.4

Глядя на «Связку», можно предложить два варианта решения.

Вариант А: из (2) найти ВС и подставить в (1).

Вариант В: из (1) выразить ВС и подставить в (2).

Для показа возможных различий в решении рассмотрим оба варианта.

Вариант А.

$BC^2 = 182^2 - 70^2 = (182 - 70)(182 + 70) = 112 \times 252 = 28224.$

Вау! – скажет читатель. И из этого числа еще нужно как-то найти корень!?

Чтобы тупо не перебирать числа подряд, попробуем поразмышлять.
С одной стороны, $70 < BC < 182$. Очевидно, что $70 < BC$, так как $70^2 < BC^2$.
С другой стороны, понятно, что $BC > 100$
(так как $100^2 = 10000$, а нам надо получить 28224!).

Проведем грубую прикидку:

$$150^2 = 22500,\ 160^2 = 25600,\ 170^2 = 28900.$$

Значит, BC больше 160, но меньше 170.

Теперь нужно найти его третью, последнюю цифру.
Для того, чтобы получить **4** в конце искомого числа, последнюю цифра должна быть или 2 ($2 \times 2 = \mathbf{4}$), или 8 ($8 \times 8 = 6\mathbf{4}$).
Проверяем: $16\mathbf{2}^2 = 26244$ - недолет ☹, $16\mathbf{8}^2 = 28224$ - то, что надо!.

Итак, BC найдено, теперь осталось вычислить x: $x = \frac{168}{70} = 2{,}4.$

Уффф! Не знаю как вы, а я уже устал! Но второй вариант все же посмотрим.

Вариант В.

Подставим $BC = 70x$ в (2), и решим полученное уравнение.

$182^2 = 70^2 + (70x)^2 = 70^2 + 70^2x^2$

$182^2 = 70^2(1 + x^2)$

$$1 + x^2 = \frac{182^2}{70^2} = \frac{182 \times 182}{70 \times 70} = \frac{91 \times 91}{35 \times 35} = \frac{13 \times 13}{5 \times 5} = \frac{169}{25}$$

$$x^2 = \frac{169}{25} - 1 = \frac{169}{25} - \frac{25}{25} = \frac{144}{25}$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{144}{25}} = \pm\frac{12}{5} = \pm 2{,}4$$

Оставляем $x = 2{,}4$ как единственно пригодное число.

Вариант В оказался проще – меньше возни с цифрами, но и вариант А при желании одолеть можно!

Кстати, очень многие задания можно решить более чем одним способом.
Поэтому не нужно судорожно пытаться запомнить какие-то особые рецепты под каждое конкретное задание.

Рисунок, здравый смысл, проверка сделанного и отсутствие спешки
всегда выводят на нужный путь!

3-Й ЭТАП: ПРОВЕРКА ПОЛУЧЕННОГО РЕЗУЛЬТАТА.

4-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

2	***,***	***4***					

B6.5. В ТРЕУГОЛЬНИКЕ ABC УГОЛ C РАВЕН 90°, $AB = 30$, $BC = 24$. НАЙДИТЕ $\cos A$.

1-ЭТАП: РАБОТА С РИСУНКОМ (РИС. 6.5).

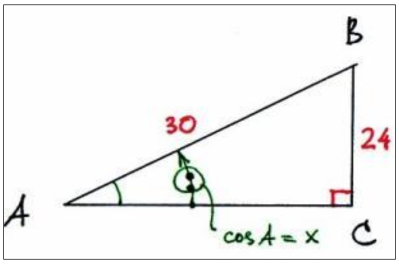


Рисунок 6.5

2-Й ЭТАП: РЕШЕНИЕ, НАХОДИМОЕ ИЗ РАССМОТРЕНИЯ РИСУНКА.

$x = \cos A = \frac{AC}{30}$, то есть $x = \frac{AC}{30}$ (1)

$30^2 = 24^2 + AC^2$ (2)

Этот пример напоминает предыдущий, но его мы решим только одним способом: выразим из (1) AC и подставим в (2). На разбот двух способов я уже не согласен ☺!

$$30^2 = 24^2 + (30x)^2 = 24^2 + 30^2x^2$$

$$30^2x^2 = 30^2 - 24^2$$

$$x^2 = \frac{30^2 - 24^2}{30^2} = \frac{900 - 676}{900} = \frac{324}{900} = \frac{108}{300} = \frac{36}{100}$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{36}{100}} = \pm\frac{6}{10} = \pm 0{,}6$$

Оставляем $x = 0{,}6$.

3-Й ЭТАП: ПРОВЕРКА ПОЛУЧЕННОГО РЕЗУЛЬТАТА.

4-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

0	*,*	*6*					

B6.6. В ТРЕУГОЛЬНИКЕ ABC УГОЛ C РАВЕН $90°$, $\cos A = \frac{4}{5}$. НАЙДИТЕ $sinB$.

1-ЭТАП: РАБОТА С РИСУНКОМ (РИС. 6.6).

2-Й ЭТАП: РЕШЕНИЕ, НАХОДИМОЕ ИЗ РАССМОТРЕНИЯ РИСУНКА.

Из рисунка видно, что искомый $sinB$ равен $\cos A$, который уже дан в условии. Таким образом,

$$sinB = \cos A = \frac{4}{5} = \frac{4 \cdot 2}{5 \cdot 2} = \frac{8}{10} = 0{,}8$$

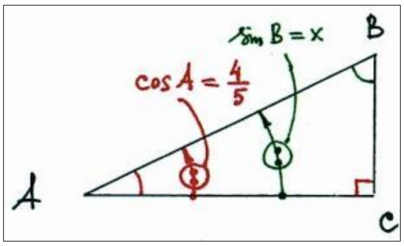


Рисунок 6.6

Этот пример можно назвать задачей – провокацией.
Она оказалась проще, чем можно было предположить.

3-Й ЭТАП: ПРОВЕРКА ПОЛУЧЕННОГО РЕЗУЛЬТАТА.

4-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

0	*,*	*8*					

B6.7. В ТРЕУГОЛЬНИКЕ ABC УГОЛ C РАВЕН $90°$, УГОЛ A РАВЕН $30°$. НАЙДИТЕ СИНУС УГЛА BAD.

1-ЭТАП: РАБОТА С РИСУНКОМ (РИС. 6.7А).

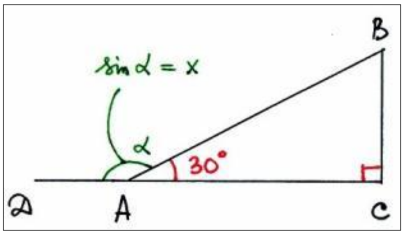


Рисунок 6.7а

2-Й ЭТАП: РЕШЕНИЕ, НАХОДИМОЕ ИЗ РАССМОТРЕНИЯ РИСУНКА.

Из рисунка видно, что $\angle \mathrm{BAD} = 180° - 30° = 150°$.
Таким образом, решение задачи сводится к нахождению значения $sin\,150°$.

Можно предложить два относительно простых способа найти эту величину. Подробно пояснять суть этих способов сейчас нет возможности – не тот формат книжки. Если расписывать все, что нуждается в подробном пояснении, то получится ощутимо более тяжелое чтиво! И любой «чайник» от него отвернется со справедливым негодованием ☺.

Итак, возможные варианты действий:

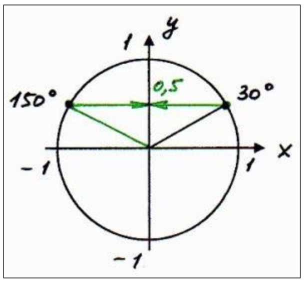


Рисунок 6.7б

1) Применим так называемую «формулу приведения»:
   $sin\,150° = sin(180° - 30°) = sin\,30° = {}^{1}/_{2} = 0{,}5.$
   Или ее же, но в другом виде:
   $sin\,150° = sin(90° + 60°) = \cos 60° = {}^{1}/_{2} = 0{,}5$.
   Естественно, результат получится тем же.
2) Если читатель понимает (или просто откуда-то помнит), что синус угла равен вертикальной координате вращаемой на единичной окружности точки, то станет понятно следующее:
   $sin\,150° = sin\,30° = 0{,}5.$
   Этот факт изображен на рис. 6.7б.

3-Й ЭТАП: ПРОВЕРКА ПОЛУЧЕННОГО РЕЗУЛЬТАТА.

4-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

0	*,*	*5*					

В6.8. В РАВНОБЕДРЕННОМ ТРЕУГОЛЬНИКЕ ABC С ОСНОВАНИЕМ AC БОКОВАЯ СТОРОНА AB РАВНА 5, А ВЫСОТА, ПРОВЕДЕННАЯ К ОСНОВАНИЮ, РАВНА $2\sqrt{6}$. НАЙДИТЕ КОСИНУС УГЛА A.

1-ЭТАП: РАБОТА С РИСУНКОМ (РИС. 6.8).

2-Й ЭТАП: РЕШЕНИЕ, НАХОДИМОЕ ИЗ РАССМОТРЕНИЯ РИСУНКА.

Предложенную задачу можно решить по крайней мере двумя способами.

1-й способ.

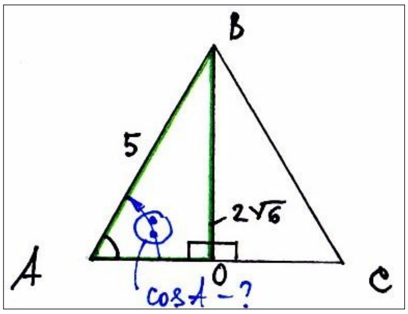


Рисунок 6.8

$$\cos A = \frac{AO}{AB} = \frac{AO}{5}$$

По теореме Пифагора для треугольника AOB:

$$AO^2 = AB^2 - BO^2$$

$$AO^2 = 5^2 - \left(2\sqrt{6}\right)^2 = 25 - 24 = 1$$

$$AO = \sqrt{1} = 1$$

Таким образом, $\cos A = \frac{1}{5} = 0{,}2$

2-й способ.

$$(\cos A)^2 + (\sin A)^2 = 1$$

$$(\cos A)^2 = 1 - (\sin A)^2 = 1 - \left(\frac{2\sqrt{6}}{5}\right)^2 = 1 - \frac{24}{25} = \frac{1}{25}$$

$$\cos A = \pm\sqrt{\frac{1}{25}}$$

Выбираем $\cos A = +\sqrt{\frac{1}{25}} = \frac{1}{5} = 0{,}2$ (косинус острого угла положителен).

3-Й ЭТАП: ПРОВЕРКА ПОЛУЧЕННОГО РЕЗУЛЬТАТА.

4-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

0	*,*	*2*					

B6.9. В ТРЕУГОЛЬНИКЕ ABC УГОЛ C РАВЕН $90°$, $AB = 8$, $tgA = \frac{3\sqrt{7}}{7}$. НАЙДИТЕ BC.

1-ЭТАП: РАБОТА С РИСУНКОМ (РИС. 6.9).

2-Й ЭТАП: РЕШЕНИЕ, НАХОДИМОЕ ИЗ РАССМОТРЕНИЯ РИСУНКА.

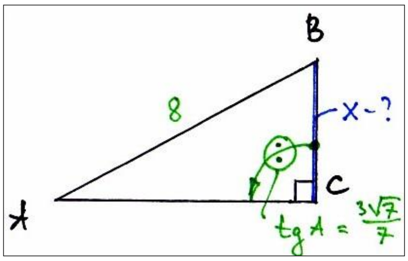


Рисунок 6.9

$tgA = \frac{BC}{AC} = \frac{x}{\sqrt{8^2 - x^2}} = \frac{3\sqrt{7}}{7}$

По свойству пропорции (см. рис. 3.1):

$7x = 3\sqrt{7(64 - x^2)}$

Найдем x из этого уравнения:

$49x^2 = 9 \cdot 7(64 - x^2)$

$16x^2 = 576$

$x^2 = 36$

$x = \pm 6$

Выбираем, естественно, $x = 6$.

3-Й ЭТАП: ПРОВЕРКА ПОЛУЧЕННОГО РЕЗУЛЬТАТА.

$$tgA = \frac{x}{AC} = \frac{6}{\sqrt{8^2 - 6^2}} = \frac{6}{\sqrt{28}} = \frac{6}{2\sqrt{7}} = \frac{3}{\sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{7}}{7}$$

4-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

6							

А теперь, в качестве отдыха после долгих трудов, рассмотрим что-нибудь совсем легкое.

B6.10. ОДИН ОСТРЫЙ УГОЛ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ТРЕУГОЛЬНИКА НА 30° БОЛЬШЕ ДРУГОГО. НАЙДИТЕ БОЛЬШИЙ ОСТРЫЙ УГОЛ.

1-ЭТАП: РАБОТА С РИСУНКОМ (РИС. 6.10).

2-Й ЭТАП: РЕШЕНИЕ, НАХОДИМОЕ ИЗ РАССМОТРЕНИЯ РИСУНКА.

Сумма углов любого треугольника равна $180°$.
Применительно к нашему случаю это означает, что

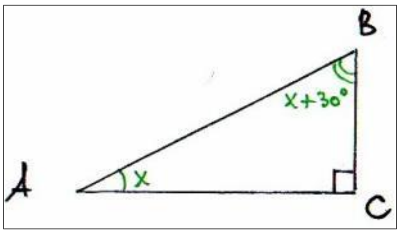


Рисунок 6.10

$x + (x + 30) + 90 = 180$

$2x + 120 = 180$

$2x = 60$

$x = 30$

Таким образом, меньший угол равен $30°$. А больший угол равен $30° + 30° = 60°$.

3-Й ЭТАП: ПРОВЕРКА ПОЛУЧЕННОГО РЕЗУЛЬТАТА.

4-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

6	*0*						

Желаю вам на ЕГЭ именно такого – легкого – задания В6!

Все предыдущие задачи объединяло наличие рисунка.
Можно сказать, что они были «из геометрии». Вместе с тем (судя по различной ЕГЭ – литературе, выпущенной в этом году) возможны задания и «из чистой тригонометрии».

Будет, наверное, полезно посмотреть и на них.

А для того, чтобы успешно справляться с ними, необходимо помнить следующее:

1) Таблицу значений тригонометрических функций для острых углов;
2) Основное тригонометрическое тождество (см. Отступление №3);
3) Правила работы с формулами приведения.

Если первые пункты списка уже «закрыты» в этой главе, то третий пункт, как показывает практика, все же требует разъяснения, для которого мы временно и уходим на очередное Тематическое Отступление.

ОТСТУПЛЕНИЕ №4: «ФОРМУЛЫ ПРИВЕДЕНИЯ»

Эти формулы называются так потому, что позволяют выразить (заменить) тригонометрические функции «особых» углов 2 – 4 четвертей через известные табличные значения «особых» углов 1 четверти. То есть «привести» их к уже знакомым цифрам для углов 30°, 45°, 60°.

Формулы приведения – часто используемый в учебных заданиях инструмент работы с тригонометрическими функциями углов больше 90°.

Формулы приведения могут быть сведены к двум **Правилам**, которые, для простоты, лучше объяснить на конкретных примерах.

Пример 1. Требуется найти $sin150°$.
Угол 150° можно получить как от ближайшей горизонтальной оси (180° – 30°), так и от ближайшей вертикальной (90° + 60°).

Правило №1 утверждает (рис. 4в):
если угол образован от горизонтали (0° = 360° или ±180°), то «приводимая» функция не изменяется, а первоначальный угол заменяется на прибавляемый (вычитаемый).
В нашем примере
$\boldsymbol{sin}\ 150° = \boldsymbol{sin}(180° - 30°) = \boldsymbol{sin}30° = 1/2.$
Если же угол образован от вертикали (± 90° или ± 270°),
то «приводимая» функции изменится на противоположную
(синус на косинус, тангенс на котангенс и так далее).
В нашем примере $\boldsymbol{sin}150° = \boldsymbol{sin}(90° + 60°) = \boldsymbol{cos}60° = 1/2.$

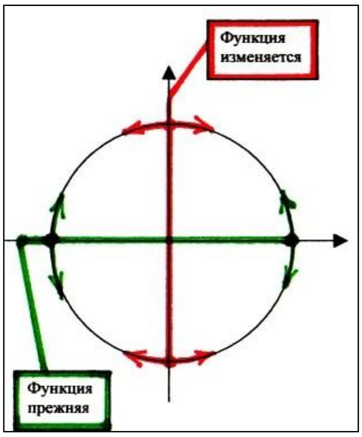


Рис. 6в

Правило №2 устанавливает знак полученной функции:
он будет таким же, как у исходной, «приводимой» функции.
В нашем примере $sin150° > 0$, значит и $sin30°$ и $cos60°$ будут иметь знак «+».

Пример 2. Требуется найти $cos600°$.
Угол 600° соответствует второму обороту вокруг окружности. В этом случае нужно отнять от 400° наибольшее целое число полных оборотов, то есть, в нашем случае 360°. После этого мы получим угол 240°, совпадающий на окружности с углом 400°. Учтем, что $cos\ 240° < 0.$

Итак,

$$cos600° = cos240° = cos(180° + 60°) = -\,cos60° = -\,1/2$$

или, в другом варианте

$$cos600° = cos240° = cos(270° - 30°) = -\,sin30° = -\,1/2,$$

что приводит к тому же ответу.

Пример 3. Требуется найти $tg225°$.

$tg225° = sin225°/cos225°$.

На единичной окружности видно, что $sin225° < 0°$ и $cos225° < 0°$, следовательно, $tg225° = sin225°/cos225° > 0°$.

Если угол образовать от горизонтали, то $tg225° = tg(180° + 45°) = +\,tg45° = 1$.

Если же угол образовать от вертикали, то $tg225° = tg(270° - 45°) = +\,cos45° = 1$.

Пример 4. Требуется найти $ctg\,\frac{11\pi}{6}$.

Если угол дан в радианах, то часто удобнее сначала перевести его в градусы, а затем выполнить уже привычные вычисления. Перевод в градусы проще всего сделать с так:

$$\frac{11\pi}{6} = \frac{11 \cdot 180°}{6} = 11 \cdot 30° = 330°$$

Таким образом, исходный угол равен $330°$, а знак искомого выражения

$ctg330° = cos\,330°/sin\,330° < 0$.

$ctg\,330° = ctg(360° - 30°) = -\,ctg\,30° = -\sqrt{3}$ или

$ctg\,330° = ctg\,(270° + 60°) = -\,tg\,60° = -\sqrt{3}$.

А теперь, после живительного перерыва на Отступление №4, переходим к обещанным примерам «из чистой тригонометрии», ради которых и нажималось столько лишних кнопочек на «клаве» ☺.

B6.11. ВЫЧИСЛИТЕ ЗНАЧЕНИЕ ВЫРАЖЕНИЯ $12 \cdot (\sin\alpha)^2$, ЕСЛИ $ctg\alpha = \sqrt{3}$.

Подобные задания можно решать, по крайней мере, двумя способами.

1-й способ.

1-ЭТАП: РЕШЕНИЕ.

Раз в условии упомянут котангенс, распишем его через синус и косинус:

$$ctg\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \sqrt{3}$$

$$(ctg\alpha)^2 = \frac{(\cos\alpha)^2}{(\sin\alpha)^2} = 3$$

$$\frac{1-(\sin\alpha)^2}{(\sin\alpha)^2} = 3$$

$$3(\sin\alpha)^2 = 1-(\sin\alpha)^2$$

$$(\sin\alpha)^2 = {}^1/_4$$

А теперь, найдя значение $(\sin\alpha)^2$, легко найдем и значение искомого выражения:

$$12(\sin\alpha)^2 = 12 \cdot \frac{1}{4} = 3$$

2-Й ЭТАП: ПРОВЕРКА ПОЛУЧЕННОГО РЕЗУЛЬТАТА.

Можно, например, решить 2-м способом, который будет показан ниже. А можно просто решить все заново, что тоже хорошо.

2-й способ.

1-ЭТАП: РЕШЕНИЕ.

Если решение первым способом было основано на применении основного тригонометрического тождества, то сейчас мы пойдем другим путем. И для него будет достаточно всего лишь помнить табличные значения тригонометрических функций.

Тогда выстраивается такая цепочка выводов (она понятна и без пояснений):

$$ctg\alpha = \sqrt{3} \to \alpha = 30° \to \sin\alpha = {}^1/_2 \to (\sin\alpha)^2 = {}^1/_4 \to 12(\sin\alpha)^2 = {}^{12}/_4 = 3$$

2-Й ЭТАП: ПРОВЕРКА ПОЛУЧЕННОГО РЕЗУЛЬТАТА.

Естественно, что ответ получился таким же самым.

3-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

3							

B6.12. ВЫЧИСЛИТЕ ЗНАЧЕНИЕ ВЫРАЖЕНИЯ $9(tg\alpha)^2$, ЕСЛИ $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

1-й способ.

1-ЭТАП: РЕШЕНИЕ.

Раз в условии упомянут тангенс, распишем его через синус и косинус:

$$(tg\alpha)^2 = \frac{(\sin\alpha)^2}{(\cos\alpha)^2} = \frac{1-(\cos\alpha)^2}{(\cos\alpha)^2} = \frac{1-{}^3/_4}{{}^3/_4} = \frac{1}{4}\cdot\frac{4}{3} = \frac{1}{3}$$

А теперь найдем значение искомого выражения:

$$9(tg\alpha)^2 = 9\cdot\frac{1}{3} = \frac{9}{1}\cdot\frac{1}{3} = 3$$

2-Й ЭТАП: ПРОВЕРКА ПОЛУЧЕННОГО РЕЗУЛЬТАТА.

2-й способ.

1-ЭТАП: РЕШЕНИЕ.

В этом примере получается такая цепочка выводов:

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \to \alpha = 30° \to tg\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} \to (tg\alpha)^2 = \frac{1}{3} \to 9(tg\alpha)^2 = \frac{9}{3} = 3$$

2-Й ЭТАП: ПРОВЕРКА ПОЛУЧЕННОГО РЕЗУЛЬТАТА.

3-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

3							

B6.13. ВЫЧИСЛИТЕ ЗНАЧЕНИЕ ВЫРАЖЕНИЯ $\sin\frac{\pi}{4}\cdot\cos\frac{3\pi}{4}$.

Ну что ж, наверное может встретиться и такое.

И опять: достаточно помнить табличные значения тригонометрических функций для острых углов и уметь работать с формулами приведения (то есть вычислять эти самые значения для тупых углов).

1-ЭТАП: РЕШЕНИЕ.

Итак, таблица нам «говорит», что $\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Значение $\cos\frac{3\pi}{4}$ найдем по формуле приведения. Причем, для удобства работы, величину угла можно перевести в градусы (но это не обязательно).

$$\frac{3\pi}{4}=\frac{3\cdot 180^\circ}{4}=3\cdot 45^\circ=135^\circ$$

$$\cos 135^\circ=\cos(180^\circ-45^\circ)=-\cos 45^\circ=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Вообще говоря, к такому же выводу можно придти, сообразив, что на единичной окружности точки для углов 135° и 45° симметричны относительно оси ОУ. И значит их синусы равны, а косинусы равны по величине, но противоположны по знаку, то есть $\cos 135^\circ=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.
Но такой путь для многих, вероятно, совсем уж непривычен.

Итак, искомое выражение равно

$$\sin\frac{\pi}{4}\cdot\cos\frac{3\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=-\frac{2}{4}=-\frac{1}{2}=-0{,}5$$

2-Й ЭТАП: ПРОВЕРКА ПОЛУЧЕННОГО РЕЗУЛЬТАТА.

3-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

-	0	,	5				

И еще одно задание напоследок.

B6.14. ВЫЧИСЛИТЕ ЗНАЧЕНИЕ ВЫРАЖЕНИЯ $\mathbf{2\sin(\pi-\alpha)+3\cos\frac{\pi}{2}}$, ЕСЛИ $\mathbf{\sin\alpha=0,4}$.

1-ЭТАП: РЕШЕНИЕ.

Согласно таблице значений $\cos\frac{\pi}{2}=0$, остается только найти $\sin(\pi-\alpha)$.

Правила формул приведения (да и просто рисунок на единичной окружности) утверждают, что $\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$, а поскольку $\sin\alpha=0{,}4$, то ответ, что называется, уже «в кармане».

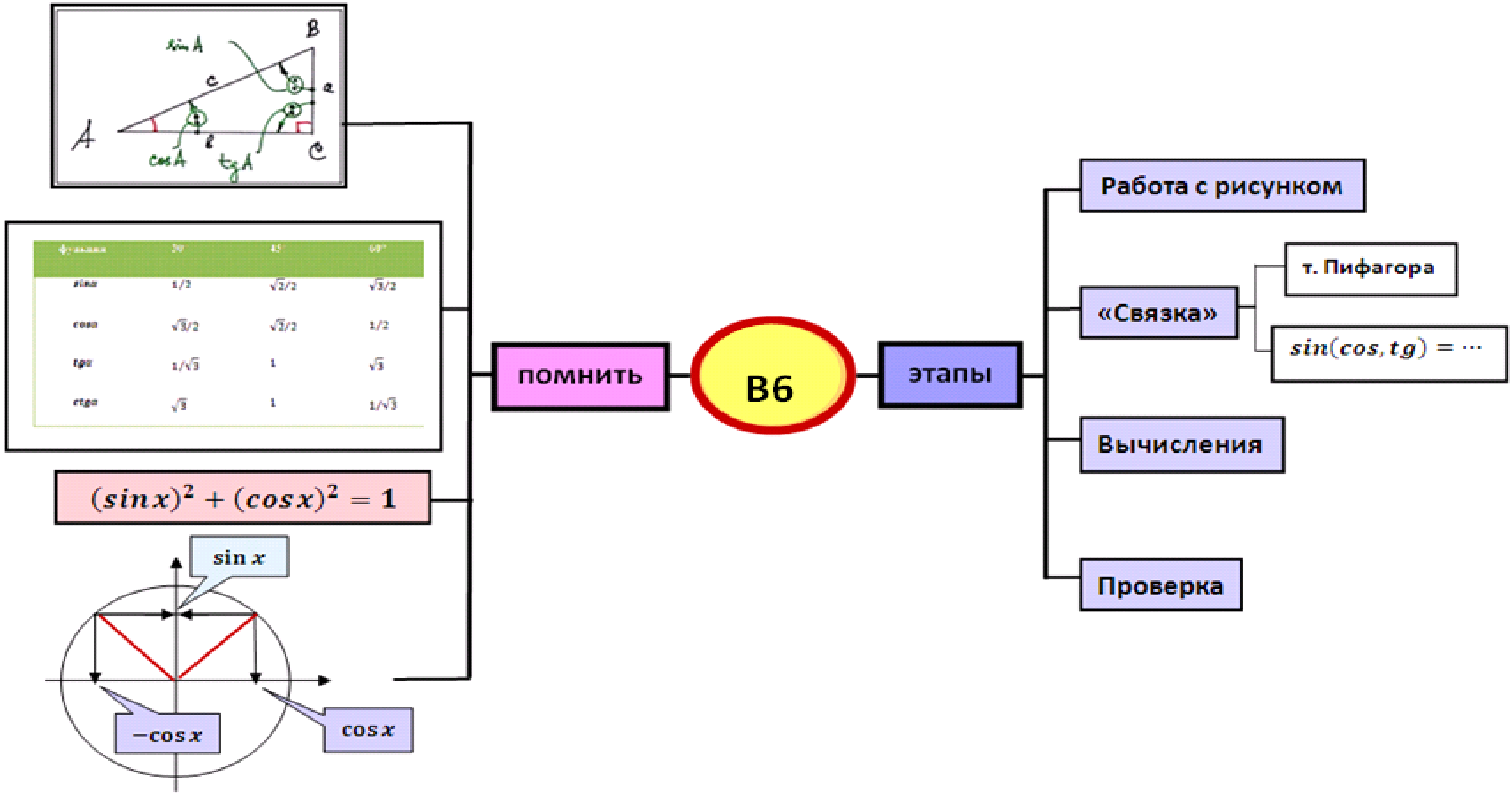
$$2\sin(\pi-\alpha)+3\cos\frac{\pi}{2}=2\cdot 0{,}4+0=0{,}8$$

2-Й ЭТАП: ПРОВЕРКА ПОЛУЧЕННОГО РЕЗУЛЬТАТА.

3-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

0	*,*	*8*					

А теперь для закрепления навыков (после просмотра расположенной ниже картинки) все на тренировку в «Открытый банк заданий по математике» ☺.

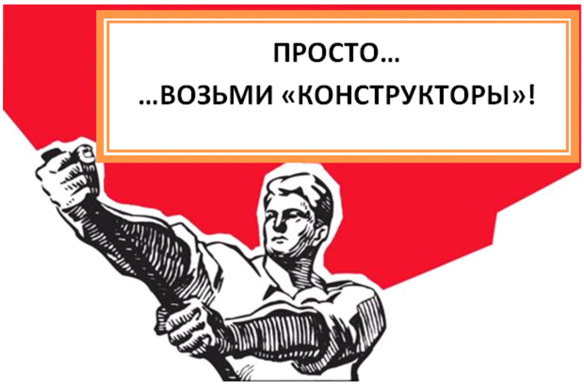

B
A
C
sin A
cos A
tg A
c
a
b
sin α 1/2 √2/2 √3/2
cos α √3/2 √2/2 1/2
tg α 1/√3 1 √3
ctg α √3 1 1/√3
$(sin\,x)^2 + (cos\,x)^2 = 1$
$\sin x$
$-\cos x$
$\cos x$
помнить
B6
этапы
Работа с рисунком
«Связка»
т. Пифагора
$sin(cos, tg) = \cdots$
Вычисления
Проверка

ЕГЭ-2012: ЗАДАНИЕ B7

Задания B7, судя по всему, будут заключаться в вычислении примеров, содержащих логарифмы («log») или степени.

Это задание сильно перекликается с B5, где приходилось решать различные уравнения (в том числе – логарифмические). Поэтому, прорабатывая задание B5 (получившееся таким ~~большим и нудным~~ живительным и интересным ☺) вы, по сути, «убиваете еще одного зайца» – по имени B7.

Во всех разобранных примерах применяются одно или несколько правил из набора «логарифмического конструктора». Для успешного решения этих заданий необходимо помнить также «показательный конструктор». Напомню, что упомянутые «конструкторы» – это наборы Правил работы со степенями и логарифмами (непременно еще раз загляните в главу B5!).



Разбивка решения примеров B7 на этапы довольно условна. Ее цель – еще раз осознать и закрепить полезную привычку: вычислить → проверить → записать ответ.

B7.1. НАЙДИТЕ ЗНАЧЕНИЕ ВЫРАЖЕНИЯ $51\log_7 \sqrt[3]{7}$.

1-Й ЭТАП: ВЫЧИСЛЕНИЕ.

$$51\log_7 \sqrt[3]{7} = 51\ \log_7 7^{\frac{1}{3}} = 51 \cdot \frac{1}{3}\ \log_7 7 = \frac{51}{3} = 17$$

2-Й И 3-Й ЭТАПЫ: ПРОВЕРКА ОТВЕТА И ЕГО ЗАПИСЬ.

1	*7*						

B7.2. НАЙДИТЕ ЗНАЧЕНИЕ ВЫРАЖЕНИЯ $25^{\log_5\sqrt{17}}$.

1-Й ЭТАП: ВЫЧИСЛЕНИЕ.

$$25^{\log_5\sqrt{17}} = 5^{2\log_5 17^{\frac{1}{2}}} = 5^{\log_5 17^{\frac{2}{2}}} = 5^{\log_5 17^{1}} = 17$$

(на последнем этапе преобразований применяется основное логарифмическое тождество).

2-Й И 3-Й ЭТАПЫ: ПРОВЕРКА ОТВЕТА И ЕГО ЗАПИСЬ.

1	*7*						

B7.3. НАЙДИТЕ ЗНАЧЕНИЕ ВЫРАЖЕНИЯ

$$\frac{\log_9\sqrt{22}}{\log_9 22}.$$

1-Й ЭТАП: ВЫЧИСЛЕНИЕ.

$$\frac{\log_9\sqrt{22}}{\log_9 22} = \frac{\log_9 22^{\frac{1}{2}}}{\log_9 22} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\log_9 22}{\log_9 22} = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

2-Й И 3-Й ЭТАПЫ: ПРОВЕРКА ОТВЕТА И ЕГО ЗАПИСЬ.

0	*,*	*5*					

B7.4. НАЙДИТЕ ЗНАЧЕНИЕ ВЫРАЖЕНИЯ

$$\frac{18}{8^{\log_8 3}}.$$

1-Й ЭТАП: ВЫЧИСЛЕНИЕ.

$$\frac{18}{8^{\log_8 3}} = \frac{18}{3} = 6$$

(для преобразования знаменателя применяется основное логарифмическое тождество).

2-Й И 3-Й ЭТАПЫ: ПРОВЕРКА ОТВЕТА И ЕГО ЗАПИСЬ.

6							

B7.5. НАЙДИТЕ ЗНАЧЕНИЕ ВЫРАЖЕНИЯ $\log_{\frac{1}{22}} \sqrt{22}$.

1-Й ЭТАП: ВЫЧИСЛЕНИЕ.

$$\log_{\frac{1}{22}} \sqrt{22} = \log_{22^{-1}} 22^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2} \log_{22} 22 = -0{,}5$$

2-Й И 3-Й ЭТАПЫ: ПРОВЕРКА ОТВЕТА И ЕГО ЗАПИСЬ.

-	*0*	*,*	5				

B7.6. НАЙДИТЕ ЗНАЧЕНИЕ ВЫРАЖЕНИЯ $7^{\log_{49} 16}$.

1-Й ЭТАП: ВЫЧИСЛЕНИЕ.

$$7^{\log_{49} 16} = 7^{\log_{7^2} 16} = 7^{\frac{1}{2}\log_7 16} = 7^{\log_7 16^{\frac{1}{2}}} = 7^{\log_7 \sqrt{16}} = \sqrt{16} = 4$$

2-Й И 3-Й ЭТАПЫ: ПРОВЕРКА ОТВЕТА И ЕГО ЗАПИСЬ.

4							

B7.7. НАЙДИТЕ ЗНАЧЕНИЕ ВЫРАЖЕНИЯ $\log_{16} \log_3 81$.

1-Й ЭТАП: ВЫЧИСЛЕНИЕ.

$$\log_{16} \log_3 81 = \log_{16} 4 = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

В этом примере один логарифм является «начинкой» другого логарифма («вложен внутрь»).

С помощью «крутилки» вычисляем сначала $\log_3 81 = 4$, а затем $\log_{16} 4 = \frac{1}{2}$.

По сути, правильнее было бы записать исходный пример в виде $\log_{16}(\log_3 81)$.

2-Й И 3-Й ЭТАПЫ: ПРОВЕРКА ОТВЕТА И ЕГО ЗАПИСЬ.

0	*,*	*5*					

B7.8. НАЙДИТЕ ЗНАЧЕНИЕ ВЫРАЖЕНИЯ $\log_7 13 \cdot \log_{13} 49.$

Обратите внимание!

При решении этого примера использовалась так называемая «формула перехода логарифма к другому основанию», которая также входит в «логарифмический конструктор», но ранее в него не была включена:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

1-Й ЭТАП: ВЫЧИСЛЕНИЕ.

$$\log_7 13 \cdot \log_{13} 49 = \log_7 13 \cdot \log_{13} 7^{\,2} = 2\log_7 13 \cdot \log_{13} 7 = 2\log_7 13 \cdot \frac{1}{\log_7 13} = 2$$

2-Й И 3-Й ЭТАПЫ: ПРОВЕРКА ОТВЕТА И ЕГО ЗАПИСЬ.

2							

B7.9. НАЙДИТЕ ЗНАЧЕНИЕ ВЫРАЖЕНИЯ $\log_5 135 - \log_5 5{,}4.$

1-Й ЭТАП: ВЫЧИСЛЕНИЕ.

$$\log_5 135 - \log_5 5{,}4 = \log_5 \frac{135}{5{,}4} = \log_5 125 = 2$$

2-Й И 3-Й ЭТАПЫ: ПРОВЕРКА ОТВЕТА И ЕГО ЗАПИСЬ.

2							

B7.10. НАЙДИТЕ ЗНАЧЕНИЕ ВЫРАЖЕНИЯ $9 - \sqrt[5]{4} \cdot 2^{\frac{3}{5}}.$

1-Й ЭТАП: ВЫЧИСЛЕНИЕ.

$$9 - \sqrt[5]{4} \cdot 2^{\frac{3}{5}} = 9 - 4^{\frac{1}{5}} \cdot 2^{\frac{3}{5}} = 9 - (2^2)^{\frac{1}{5}} \cdot 2^{\frac{3}{5}} = 9 - 2^{\frac{2}{5}} \cdot 2^{\frac{3}{5}} = 9 - 2^{\frac{5}{5}} = 9 - 2 = 7$$

2-Й И 3-Й ЭТАПЫ: ПРОВЕРКА ОТВЕТА И ЕГО ЗАПИСЬ.

7							

B7.11. НАЙДИТЕ ЗНАЧЕНИЕ ВЫРАЖЕНИЯ $-13\cdot(256)^{\frac{1}{8}}+16.$

1-Й ЭТАП: ВЫЧИСЛЕНИЕ.

$$-13\cdot(256)^{\frac{1}{8}}+16=-13\cdot(4^4)^{\frac{1}{8}}+16=-13\cdot 4^{\frac{4}{8}}+16=-13\cdot 4^{\frac{1}{2}}+16=$$
$$=-13\cdot\sqrt{4}+16=-13\cdot 2+16=-26+16=-10$$

2-Й И 3-Й ЭТАПЫ: ПРОВЕРКА ОТВЕТА И ЕГО ЗАПИСЬ.

-	*1*	*0*					

Как видно из решенных примеров, B7-е не требуют особой математической мудрости. Знай «конструкторы» и пользуйся ими!

Для того, чтобы уверенно выполнять подобные задания, необходимо не столько понимать правила действий с логарифмами и степенями, сколько автоматически применять их на практике.

А для отработки этого самого автоматизма – все на тренировку в «Открытый банк заданий по математике» ☺!

ЕГЭ-2012: ЗАДАНИЕ В8

Производная функции. Именно с ней связано задание В8 предстоящего экзамена.
В условии этих заданий дается либо график некой функции, либо график ее производной.
И по этому графику необходимо либо вычислить значение производной в указанной точке, либо сделать какие-то другие выводы.

По сути, эти задания довольно просты, хотя и занимают 8-е место «в рейтинге» части В.

Довольно часто, после прочтения школьного учебника, производная функции кажется чем-то нереально сложным. Настолько сложным, что непонятно даже, «о чем это».
И даже кажется, что простыми словами объяснить это невозможно.

Именно поэтому – для небольшого прояснения вопроса – сделаем очередное Тематическое Отступление. К сожалению, не такое уж и маленькое ☹.

Но если его читать совсем уж не хочется, то можно сразу перейти к разбору примеров. Возможно, что их окажется достаточно для успешного решения этих заданий.

ОТСТУПЛЕНИЕ №4: «ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ: ЧТО ЭТО?».

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ

1) Не все функции одинаковы. Более того, они во многом очень даже различны.
Сейчас мы обсудим не все их возможные различия, а только некоторые.
А именно – скорость их изменения, то есть убывания или возрастания.

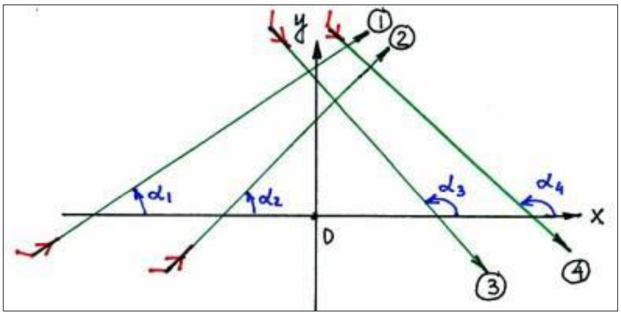


Рисунок 8а

Например, функции 1 и 2 – возрастающие (↑), а 3 и 4 – убывающие (↓) (рис. 8а).
Отличить друг от друга их очень просто. Если представить некий самолет, который летит по линии функции слева направо, и при этом набирает высоту (↑), то функция возрастает. Если он снижается (↓), то убывает. Функции 1 и 2, как видно, отличаются друг от друга скоростью возрастания («взлета»). А функции 3 и 4 – скоростью убывания («снижения»).

2) В чем же измерять скорость возрастания или убывания функции?
Самая простая мысль – связать эту скорость с углом наклона прямой линии к горизонту. Чем угол ближе к вертикали, тем быстрее изменение, чем он ближе к горизонтали – тем изменение медленнее. И эта мысль совершенно правильна! Однако для измерения этой скорости решили использовать не величину угла в градусах, а тангенс этого угла. То есть отношение длин вертикального катета к горизонтальному в прямоугольном треугольнике, построенном в створе этого угла (рис. 8б). Далее (при разборе примеров) все это будет более понятно. Именно это отношение и считается равным скорости изменения функции.
И действительно, отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ показывает, на сколько единиц изменится функция при изменении ее аргумента на 1 единицу.

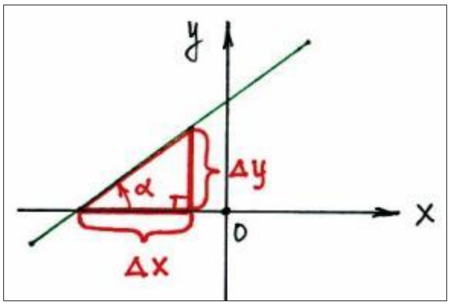


Рисунок 8б

Точно так же, как «обычная» скорость, равная $v = \frac{s}{t}$, которая показывает, сколько единиц длины (метров) тело проходит за 1 единицу времени (секунду) (рис. 8в).

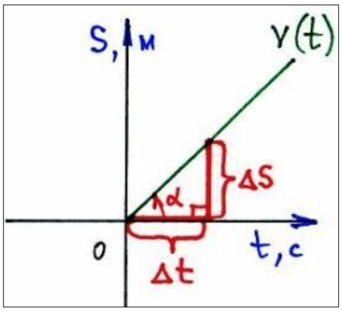


Рисунок 8в

3) А как быть, если функция представлена не прямой линией, а кривой?
Ведь угол наклона к горизонту этой линии в разных ее точках различен?
В этом случае вопрос решается очень просто. В любой точке графика функции можно построить касательную (рис. 8г). А наклон этой касательной к горизонту (точнее, тангенс этого угла), как уже понятно, будет равен скорости изменения функции.
Итак, мы приходим к простой схеме работы:
выбрать точку на графике функции → провести в ней касательную к графику → отметить угол между касательной и горизонтом → вычислить тангенс угла.
А значит – найдем искомую скорость изменения функции («Элементарно, Ватсон!»).

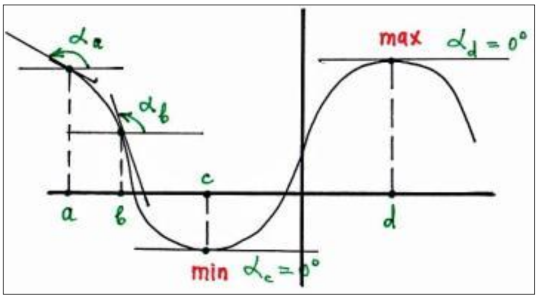


Рисунок 8г

4) А для того, чтобы не произносить каждый раз словосочетания типа «тангенс угла наклона касательной к горизонту» или «скорость изменения функции», используется специальный термин: «производная функции». Вот и все!

Итак: производная функции в некоторой ее точке равна тангенсу угла наклона касательной к горизонту, и равна скорости изменения функции в этой же точке.
Если записать последнее предложение в виде формулы, то получится следующее:

$$f'(x_0) = tg\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} = v(f)$$

А теперь поговорим немного о деталях…

НЕМНОГО О ДЕТАЛЯХ…

Из рисунков можно легко увидеть следующее:

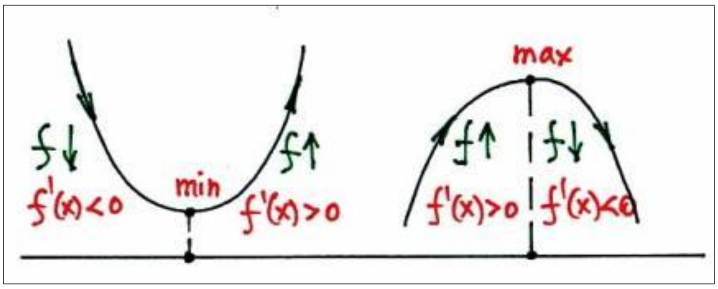


Рисунок 8д

5) Если f ↑, то ее касательная тоже ↑ и угол ее наклона к горизонту $0° < \alpha < 90°$ (при отсчете от $0°$ против часовой стрелки).
Производная такой функции $\boldsymbol{f'(x) > 0}$ (рис. 8д).

6) Если f ↓, то ее касательная тоже ↓ и угол ее наклона к горизонту $90° < \alpha < 180°$.
Производная такой функции $\boldsymbol{f'(x) < 0}$ (рис. 8д).

7) Чем ближе угол наклона касательной к вертикали, тем больше скорость ↑ или ↓ функции.

8) В точках максимума и минимума графика (если таковые есть) касательная всегда горизонтальна.
В этих точках $\alpha = 0^0 \rightarrow tg\alpha = 0 \rightarrow \boldsymbol{f'(x) = 0}$.
Таким образом, в этих точках скорость функции не изменяется.

9) И последнее: допустим, дан график производной функции и по нему видно, что в некоторой точке $f'(x) = 0$. Как же определить – это точка максимума или минимума? Ответить на этот вопрос поможет рисунок 46.
Глядя на него, можно сделать простые выводы:

Слева от точки максимума f ↑ и $f'(x) > 0$, справа от нее f ↓ и $f'(x) < 0$.
Таким образом, в точке максимума производная меняет знак с $" + "$ на $" - "$.

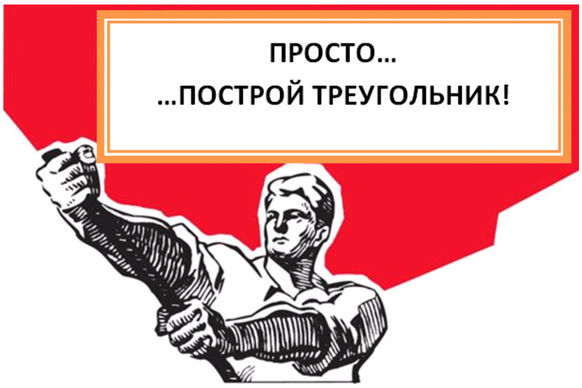
Слева от точки минимума f ↓ и $f'(x) < 0$, справа от нее f ↑ и $f'(x) > 0$.
Таким образом, в точке минимума производная меняет знак с $" - "$ на $" + "$.

Вот и все, что нужно знать о производной ☺.
А не слабое получилось Отступление! А?

Впрочем, если вам недостаточно этой информации (как говорится в известной рекламе: «Одной порции всегда мало!»), вы всегда можете увлекательно провести время с каким-нибудь толстым справочником по математике ☺!

А теперь перейдем к примерам, для решения которых и пригодится вся эта теория.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАНИЙ В8



В8.1. НА РИСУНКЕ ИЗОБРАЖЕН ГРАФИК ФУНКЦИИ $y = f(x)$ И КАСАТЕЛЬНАЯ К ЭТОМУ ГРАФИКУ, ПРОВЕДЕННАЯ В ТОЧКЕ С АБСЦИССОЙ x_0. НАЙДИТЕ ЗНАЧЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ ФУНКЦИИ $y = f(x)$ В ТОЧКЕ x_0 (РИС. 8.1).

Если задание заключается в **нахождении производной по графику функции**, то удобен, например, такой порядок работы.

1-Й ЭТАП: ОТМЕТИТЬ ТОЧКОЙ ПЕРЕСЕЧЕНИЕ КАСАТЕЛЬНОЙ И КАКОЙ-ЛИБО ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ПРЯМОЙ, А СТРЕЛКОЙ – ВОЗРАСТАЕТ ИЛИ УБЫВАЕТ КАСАТЕЛЬНАЯ К ГРАФИКУ (ВОЗРАСТАНИЮ СООТВЕТСТВУЕТ ПОЛОЖИТЕЛЬНАЯ ПРОИЗВОДНАЯ, УБЫВАНИЮ – ОТРИЦАТЕЛЬНАЯ).
В СЛУЧАЕ ЕЕ УБЫВАНИЯ СРАЗУ ЖЕ ЗАПИСАТЬ "$f'(x) = -$", ЧТОБЫ НЕ ЗАБЫТЬ ОБ ЭТОМ.

В нашем примере горизонтальной прямой будет ось OX, касательная при этом «возрастающая».

2-Й ЭТАП: ОТМЕТИТЬ ДУГАМИ ОСТРЫЕ УГЛЫ МЕЖДУ КАСАТЕЛЬНОЙ И ГОРИЗОНТОМ (ИЛИ ОСЬЮ OX).

В нашем примере в поле рисунка можно отметить только один угол.

3-Й ЭТАП: НА БОЛЕЕ УДОБНОМ ИЗ ОСТРЫХ УГЛОВ ПОСТРОИТЬ ПРЯМОУГОЛЬНЫЙ ТРЕУГОЛЬНИК СО СТОРОНАМИ, РАВНЫМИ ЦЕЛОМУ ЧИСЛУ КЛЕТОК.

В нашем примере, удобно выбрать, например, треугольник с катетами $\Delta y = 2$ и $\Delta x = 4$.

4-Й ЭТАП: ВЫЧИСЛИТЬ ПРОИЗВОДНУЮ В ТОЧКЕ X_0.

$$f'(\mathrm{x}_0) = +\frac{\Delta y}{\Delta x} = +\frac{2}{4} = 0{,}5$$

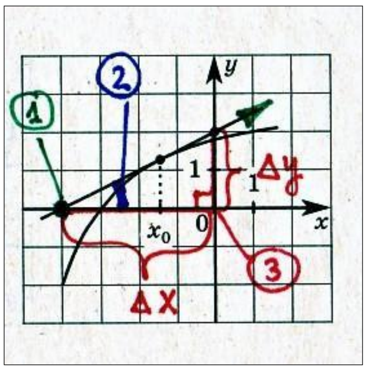


Рисунок 8.1

5-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПРАВИЛЬНОСТЬ ВСЕХ ПРЕДЫДУЩИХ ДЕЙСТВИЙ.

6-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ В ВИДЕ ДЕСЯТИЧНОГО ЧИСЛА.

0	*,*	*5*					

B8.2. НА РИСУНКЕ ИЗОБРАЖЕН ГРАФИК ФУНКЦИИ $y = f(x)$ И КАСАТЕЛЬНАЯ К ЭТОМУ ГРАФИКУ, ПРОВЕДЕННАЯ В ТОЧКЕ С АБСЦИССОЙ x_0.
НАЙДИТЕ ЗНАЧЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ ФУНКЦИИ $y = f(x)$ В ТОЧКЕ x_0 (РИС. 8.2).

1-Й ЭТАП: ОТМЕТИТЬ ТОЧКОЙ ПЕРЕСЕЧЕНИЕ КАСАТЕЛЬНОЙ И КАКОЙ-ЛИБО ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ПРЯМОЙ, А СТРЕЛКОЙ – ВОЗРАСТАЕТ ИЛИ УБЫВАЕТ КАСАТЕЛЬНАЯ К ГРАФИКУ (ВОЗРАСТАНИЮ СООТВЕТСТВУЕТ ПОЛОЖИТЕЛЬНАЯ ПРОИЗВОДНАЯ, УБЫВАНИЮ – ОТРИЦАТЕЛЬНАЯ).
В СЛУЧАЕ ЕЕ УБЫВАНИЯ СРАЗУ ЖЕ ЗАПИСАТЬ "$f'(x) = -$", ЧТОБЫ НЕ ЗАБЫТЬ ОБ ЭТОМ.

В нашем примере в качестве горизонтальной прямой удобно использовать ось OX, касательная при этом «убывающая».

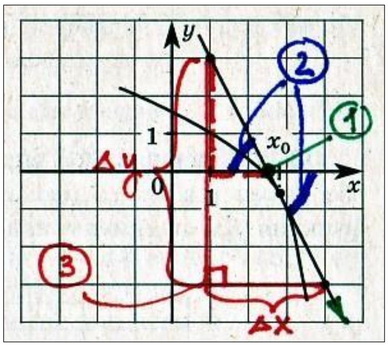


Рисунок 8.2

2-Й ЭТАП: ОТМЕТИТЬ ДУГАМИ ОСТРЫЕ УГЛЫ МЕЖДУ КАСАТЕЛЬНОЙ И ГОРИЗОНТОМ (ИЛИ ОСЬЮ OX).

Предложенный рисунок позволяет выделить оба угла.

3-Й ЭТАП: НА БОЛЕЕ УДОБНОМ ИЗ ОСТРЫХ УГЛОВ ПОСТРОИТЬ ПРЯМОУГОЛЬНЫЙ ТРЕУГОЛЬНИК СО СТОРОНАМИ, РАВНЫМИ ЦЕЛОМУ ЧИСЛУ КЛЕТОК.

Итак, $\Delta y = 6$ и $\Delta x = 3$.

4-Й ЭТАП: ВЫЧИСЛИТЬ ПРОИЗВОДНУЮ В ТОЧКЕ X_0.

$$f'(\mathrm{x}_0) = -\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{6}{3} = -2$$

5-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПРАВИЛЬНОСТЬ ВСЕХ ПРЕДЫДУЩИХ ДЕЙСТВИЙ.

6-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ В ВИДЕ ДЕСЯТИЧНОГО ЧИСЛА.

-	*2*						

B8.3. НА РИСУНКЕ ИЗОБРАЖЕН ГРАФИК ФУНКЦИИ $y = f(x)$ И КАСАТЕЛЬНАЯ К ЭТОМУ ГРАФИКУ, ПРОВЕДЕННАЯ В ТОЧКЕ С АБСЦИССОЙ x_0.
НАЙДИТЕ ЗНАЧЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ ФУНКЦИИ $y = f(x)$ В ТОЧКЕ x_0 (РИС. 8.3).

Это задание похоже на два предыдущих.

1-Й ЭТАП: ОТМЕТИТЬ ТОЧКОЙ ПЕРЕСЕЧЕНИЕ КАСАТЕЛЬНОЙ И КАКОЙ-ЛИБО ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ПРЯМОЙ, А СТРЕЛКОЙ – ВОЗРАСТАЕТ ИЛИ УБЫВАЕТ КАСАТЕЛЬНАЯ К ГРАФИКУ (ВОЗРАСТАНИЮ СООТВЕТСТВУЕТ ПОЛОЖИТЕЛЬНАЯ ПРОИЗВОДНАЯ, УБЫВАНИЮ – ОТРИЦАТЕЛЬНАЯ).
В СЛУЧАЕ ЕЕ УБЫВАНИЯ СРАЗУ ЖЕ ЗАПИСАТЬ "$f'(x) = -$", ЧТОБЫ НЕ ЗАБЫТЬ ОБ ЭТОМ.

В этом примере касательная опять «убывающая».

2-Й ЭТАП: ОТМЕТИТЬ ДУГАМИ ОСТРЫЕ УГЛЫ МЕЖДУ КАСАТЕЛЬНОЙ И ГОРИЗОНТОМ (ИЛИ ОСЬЮ ОХ).

3-Й ЭТАП: НА БОЛЕЕ УДОБНОМ ИЗ ОСТРЫХ УГЛОВ ПОСТРОИТЬ ПРЯМОУГОЛЬНЫЙ ТРЕУГОЛЬНИК СО СТОРОНАМИ, РАВНЫМИ ЦЕЛОМУ ЧИСЛУ КЛЕТОК.

В качестве варианта можно предложить треугольник со сторонами $\Delta y = 3$ и $\Delta x = 6$ (хотя меньший треугольник, со сторонами $\Delta y = 2$ и $\Delta x = 4$, тоже подходит).

4-Й ЭТАП: ВЫЧИСЛИТЬ ПРОИЗВОДНУЮ В ТОЧКЕ X_0.

$$f'(x_0) = -\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{3}{6} = -\frac{1}{2} = -0{,}5$$

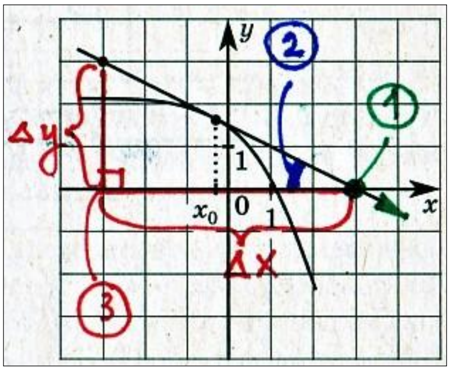


Рисунок 8.3

5-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПРАВИЛЬНОСТЬ ВСЕХ ПРЕДЫДУЩИХ ДЕЙСТВИЙ.

6-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ В ВИДЕ ДЕСЯТИЧНОГО ЧИСЛА.

-	0	,	5				

B8.4. НА РИСУНКЕ ИЗОБРАЖЕН ГРАФИК ФУНКЦИИ $y = f(x)$ И КАСАТЕЛЬНАЯ К ЭТОМУ ГРАФИКУ, ПРОВЕДЕННАЯ В ТОЧКЕ С АБСЦИССОЙ x_0. НАЙДИТЕ ЗНАЧЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ ФУНКЦИИ $y = f(x)$ В ТОЧКЕ x_0 (РИС. 8.4).

1-Й ЭТАП: АНАЛИЗ ГРАФИКА.

В этом задании требуется найти производную в точке минимума функции.
Горизонтальная касательная к ней уже нарисована. Очевидно, что в этой точке $f'(\mathrm{x}) = 0$
(как, впрочем, было бы и в точке максимума).

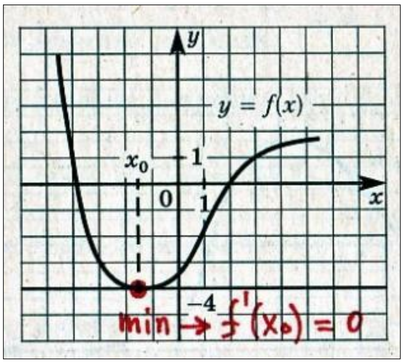


Рисунок 8.4

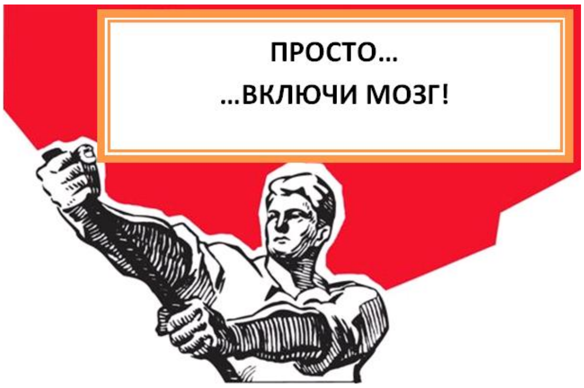
2-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПРАВИЛЬНОСТЬ ВСЕХ ПРЕДЫДУЩИХ ДЕЙСТВИЙ.

3-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ В ВИДЕ ДЕСЯТИЧНОГО ЧИСЛА.

0							

Вот и все – это и есть ответ! Желаю вам на ЕГЭ подобного простого задания!

А теперь рассмотрим несколько примеров с заданиями B8 другого типа.



В8.5. ФУНКЦИЯ $f(x)$ ОПРЕДЕЛЕНА НА ИНТЕРВАЛЕ $(-8;8)$. НА РИСУНКЕ ИЗОБРАЖЕН ГРАФИК ЕЕ ПРОИЗВОДНОЙ. НАЙДИТЕ ДЛИНУ НАИБОЛЬШЕГО ПРОМЕЖУТКА ВОЗРАСТАНИЯ ФУНКЦИИ $y = f(x)$ (РИС. 8.5).

1-Й ЭТАП: АНАЛИЗ ГРАФИКА.

Функция возрастает там, где производная $f'(x) > 0$, и график производной находится выше оси OX (заштрихованная зона на рисунке).

Очевидно, что на промежутке $(-8;8)$ она возрастает на 3-х интервалах, и наибольший из них $(-1;+3)$. Его длина равна 4.

2-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПРАВИЛЬНОСТЬ ВСЕХ ПРЕДЫДУЩИХ ДЕЙСТВИЙ.

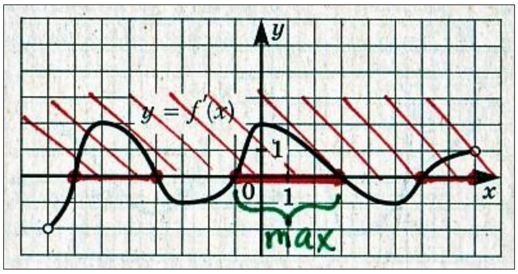


Рисунок 8.5

3-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ В ВИДЕ ДЕСЯТИЧНОГО ЧИСЛА.

4							

В8.6. ФУНКЦИЯ $f(x)$ ОПРЕДЕЛЕНА НА ИНТЕРВАЛЕ $[-6;3]$. НА РИСУНКЕ ИЗОБРАЖЕН ГРАФИК ЕЕ ПРОИЗВОДНОЙ. В КАКОЙ ТОЧКЕ ОТРЕЗКА $[-3;2]$ ФУНКЦИЯ $f(x)$ ПРИНИМАЕТ НАИБОЛЬШЕЕ ЗНАЧЕНИЕ (РИС. 8.6)?

1-Й ЭТАП: АНАЛИЗ ГРАФИКА.

На отрезке $[-3;2]$, к которому относится вопрос, $f'(x) > 0$ (ее график выше оси OX).
Таким образом, на всем этом отрезке функция $f(x)$ возрастает.
Скорость ее возрастания изменяется (график «волнится»), но она все время возрастает.
Следовательно, свое наибольшее значение на этом отрезке она принимает в точке $x = 2$.

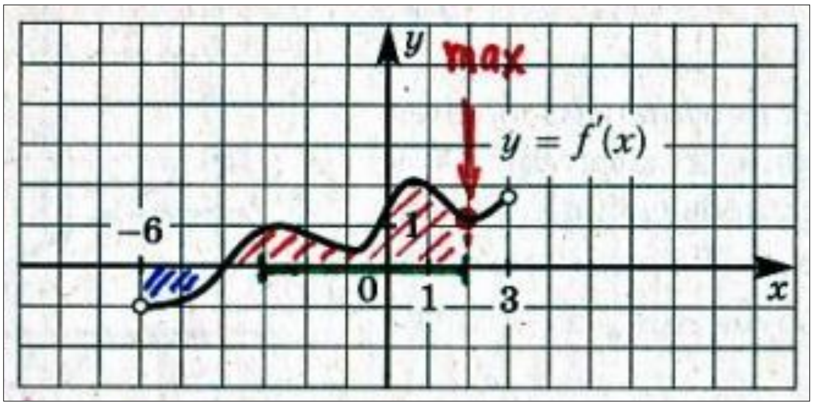


Рисунок 8.6

2-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПРАВИЛЬНОСТЬ ВСЕХ ПРЕДЫДУЩИХ ДЕЙСТВИЙ.

3-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ В ВИДЕ ДЕСЯТИЧНОГО ЧИСЛА.

2							

В8.7. ФУНКЦИЯ $f(x)$ ОПРЕДЕЛЕНА НА ПРОМЕЖУТКЕ $(a;b)$. НА РИСУНКЕ ИЗОБРАЖЕН ГРАФИК ЕЕ ПРОИЗВОДНОЙ. УКАЖИТЕ ЧИСЛО ТОЧЕК МИНИМУМА ФУНКЦИИ $y = f(x)$ НА ПРОМЕЖУТКЕ $(a;b)$ (РИС. 8.7).

1-Й ЭТАП: АНАЛИЗ ГРАФИКА.

Глядя на график производной, видно, что он пересекает ось ОХ в 7-и точках, и в этих точках $f'(x) = 0$. Во всех этих точках функция имеет либо максимум, либо минимум.
Точки минимума отличаются тем, что слева от них функция ↓ и $f'(x) < 0$,
а справа от них функция ↑ и $f'(x) > 0$.
Иначе говоря, график производной в этих точках пересекает горизонтальную ось «снизу вверх» при направлении «обхода» слева направо. Таких точек три (3), что и будет ответом.

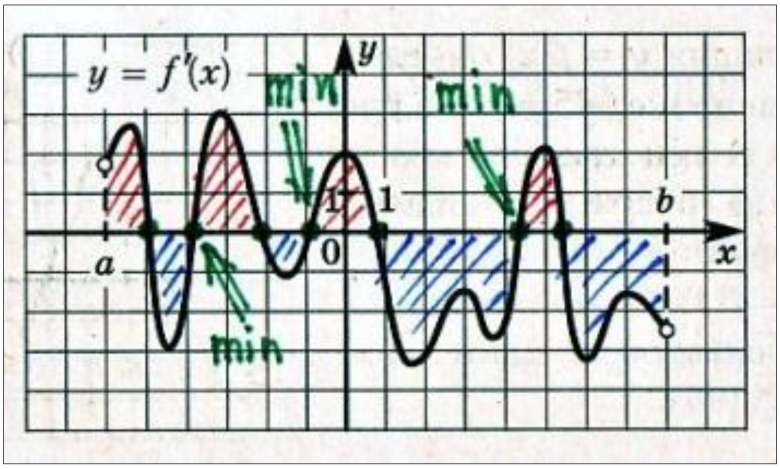


Рисунок 8.7

2-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПРАВИЛЬНОСТЬ ВСЕХ ПРЕДЫДУЩИХ ДЕЙСТВИЙ.

3-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ В ВИДЕ ДЕСЯТИЧНОГО ЧИСЛА.

3							

B8.8. ФУНКЦИЯ $f(x)$ ОПРЕДЕЛЕНА НА ИНТЕРВАЛЕ $(-5;4)$. НА РИСУНКЕ ИЗОБРАЖЕН ГРАФИК ЕЕ ПРОИЗВОДНОЙ. УКАЖИТЕ ТОЧКУ МАКСИМУМА ФУНКЦИИ $y = f(x)$ НА ПРОМЕЖУТКЕ $(-5;4)$ (РИС. 8.8).

1-Й ЭТАП: АНАЛИЗ ГРАФИКА.

Точка максимума находится в неожиданном на первый взгляд месте: в точке $x = -3$!

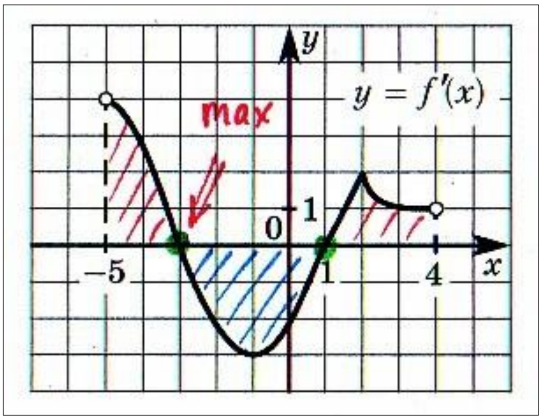


Рисунок 8.8

2-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПРАВИЛЬНОСТЬ ВСЕХ ПРЕДЫДУЩИХ ДЕЙСТВИЙ.

3-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ В ВИДЕ ДЕСЯТИЧНОГО ЧИСЛА.

-	*3*						

B8.9. НА РИСУНКЕ ИЗОБРАЖЕН ГРАФИК ПРОИЗВОДНОЙ ФУНКЦИИ $f'(x)$, ОПРЕДЕЛЕННОЙ НА ИНТЕРВАЛЕ $(-2; 9)$. НАЙДИТЕ КОЛИЧЕСТВО ТОЧЕК, В КОТОРЫХ КАСАТЕЛЬНАЯ К ГРАФИКУ ФУНКЦИИ $f(x)$ ПАРАЛЛЕЛЬНА ПРЯМОЙ $y = 3x - 12$ ИЛИ СОВПАДАЕТ С НЕЙ (РИС. 8.9).

Задачи такого типа (при первой встрече с ними) вызывают затруднение у большинства выпускников. Обычно непонятно даже, с какой стороны к ним вообще нужно подходить.

Между тем, разобраться в них достаточно просто.

1-Й ЭТАП: АНАЛИЗ ГРАФИКА.

Прямая $y = \mathbf{3}x - 12$, указанная в условии, имеет производную, равную коэффициенту «при x» и равную $+3$. Такую же производную (то есть тот же наклон к горизонту) будут иметь и все прямые, параллельные ей.

Таким образом, на графике производной $f'(x)$, который дан с условии, всего лишь нужно отметить все точки, в которых $y = f'(x) = +3$.

Таких точек – две (2). Это и будет ответом задания.

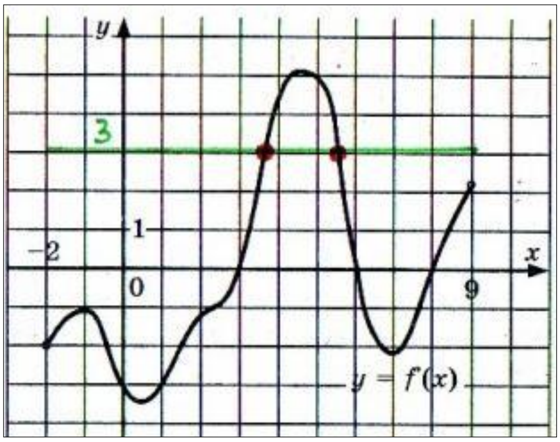


Рисунок 8.9

2-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПРАВИЛЬНОСТЬ ВСЕХ ПРЕДЫДУЩИХ ДЕЙСТВИЙ.

3-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ В ВИДЕ ДЕСЯТИЧНОГО ЧИСЛА.

2							

B8.10. НА РИСУНКЕ ИЗОБРАЖЕН ГРАФИК ПРОИЗВОДНОЙ ФУНКЦИИ $f'(x)$, ОПРЕДЕЛЕННОЙ НА ИНТЕРВАЛЕ $(-9; 8)$. НАЙДИТЕ КОЛИЧЕСТВО ТОЧЕК, В КОТОРЫХ КАСАТЕЛЬНАЯ К ГРАФИКУ ФУНКЦИИ $f(x)$ ПАРАЛЛЕЛЬНА ПРЯМОЙ $y = -2x + 5$ ИЛИ СОВПАДАЕТ С НЕЙ (РИС. 8.10).

Эта задача аналогична предыдущей.

1-Й ЭТАП: АНАЛИЗ ГРАФИКА.

Для решения нужно на предлагаемом графике производной отметить все точки с ординатой, равной $y = -2$ (в условии дана прямая $\boldsymbol{y = -2x + 5}$).
Таких точек 4 (четыре). Это число и является ответом задачи.

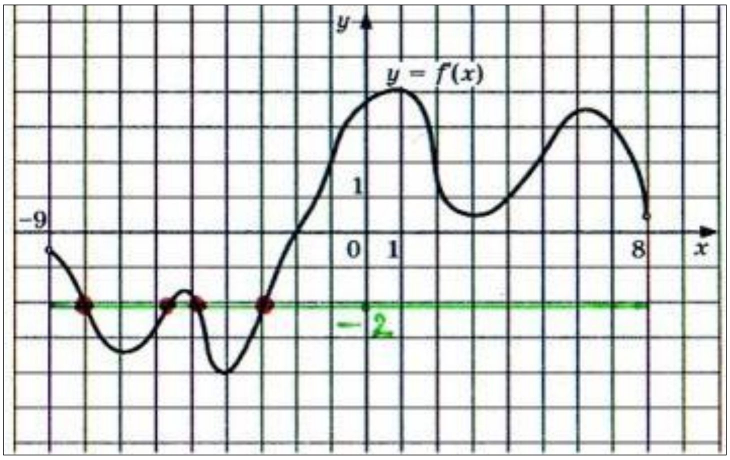


Рисунок 8.10

2-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПРАВИЛЬНОСТЬ ВСЕХ ПРЕДЫДУЩИХ ДЕЙСТВИЙ.

3-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ В ВИДЕ ДЕСЯТИЧНОГО ЧИСЛА.

4							

Много подобных картинок с пользой для себя вы можете найти и поразглядывать в «Открытом банке заданий по математике» ☺.

ЕГЭ-2012: ЗАДАНИЕ B11

Объемные геометрические фигуры. Именно с ними предстоит встретиться в Задании B11 экзамена. В этих заданиях упоминаются два типа фигур: усеченные фигуры (конус и пирамида) и «обыкновенные», то есть неусеченные (цилиндр, призма, прямоугольный параллелепипед, реже шар).

Практически все задания B11 довольно просты. А порой – даже примитивны.
Но, как всегда, только при правильном подходе к ним.

Для их успешного решения обязательно нужно отразить суть задачи на одном или двух рисунках. Как правило, первый, объемный рисунок нужен для общего представления. Но часто его бывает недостаточно, так как некоторые «дорисовки» на нем делать неудобно. Именно поэтому очень полезно использовать дополнительные рисунки. Например, рисунок основания фигуры. А также вид фигуры сверху или сбоку.

Понятно, что действительно красивые и правильные рисунки бывают только в книжках. Такие рисунки получаются лишь у немногих (у меня, например, до сих пор не получаются ☹). Но это и не важно! Лишь бы они помогали в работе. Некоторые рисунки неизбежно будут неудачными – это нормально. Спокойно зачеркиваем их и делаем другие. Какие бы плохие навыки рисования у вас ни были, в процессе самостоятельного решения десятка задач они заметно улучшатся. И уж для B11 станут вполне достаточными!

Как вы, наверное, уже убедились, многие справочники и различные пособия предлагают поистине огромное количество разных формул по геометрии. Как простых, так и довольно сложных. Заучивать их подряд, без разбора, категорически не следует – это бесполезная трата сил и времени.

Для успешного решения заданий B11 вполне достаточно помнить следующее:

- ✓ Объем любой «обычной» фигуры $\boldsymbol{V = S_{\text{осн}}} \cdot \mathrm{H}$;
- ✓ Объем любой усеченной фигуры $\boldsymbol{V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}}} \cdot \mathrm{H}$, то есть в 3 раза меньше при прочих равных условиях (то есть при тех же $S_{\text{осн}}$ и Н);
- ✓ Площадь круга $\boldsymbol{S = \pi r^2}$;
- ✓ Длина окружности $\boldsymbol{C = 2\pi r}$;
- ✓ Теорема Пифагора (обсуждалась ранее в задании B4);
- ✓ Объем шара $\boldsymbol{V = \frac{4}{3}\pi r^3}$, а также
- ✓ Формулы площадей квадрата, прямоугольника и треугольника, которые уже встречались на страницах этого Пособия.

А теперь, не тратя времени на ненужную теорию, займется примерами…

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАНИЙ B11

B11.1. ПРЯМОУГОЛЬНЫЙ ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕД ОПИСАН ОКОЛО СФЕРЫ РАДИУСА $0,5$. НАЙДИТЕ ЕГО ОБЪЕМ.

1-Й ЭТАП: НАНЕСТИ НА ОДИН ИЛИ НЕСКОЛЬКО РИСУНКОВ ВСЮ ИНФОРМАЦИЮ ИЗ УСЛОВИЯ ЗАДАНИЯ (РИС. 11.1)

Вписывать сферу в параллелепипед на объемном рисунке трудно. Поэтому сделаем это на дополнительном рисунке 11.1б (вид сверху или сбоку). Очевидно, что упомянутый параллелепипед является кубом, раз он описан около сферы.

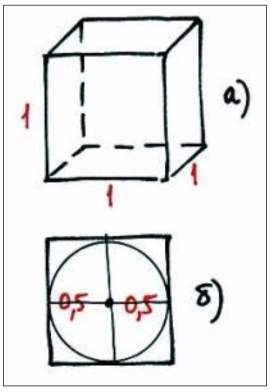


Рисунок 11.1

2-Й ЭТАП: ПОИСК ВАРИАНТОВ РЕШЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ АНАЛИЗА РИСУНКОВ. ВЫЧИСЛЕНИЯ.

Видно, что все ребра этого куба (то есть его длина, ширина и высота) равны $0{,}5 + 0{,}5 = 1$. Таким образом, искомый объем параллелепипеда равен

$V = S_{\text{осн}} \cdot \text{H} = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$

3-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПРАВИЛЬНОСТЬ ВСЕХ ПРЕДЫДУЩИХ ДЕЙСТВИЙ.

4-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ В ВИДЕ ДЕСЯТИЧНОГО ЧИСЛА.

1							

B11.2. ЦИЛИНДР И КОНУС ИМЕЮТ ОБЩЕЕ ОСНОВАНИЕ И ОБЩУЮ ВЫСОТУ. ВЫЧИСЛИТЕ ОБЪЕМ ЦИЛИНДРА, ЕСЛИ ОБЪЕМ КОНУСА РАВЕН 27.

1-Й ЭТАП: НАНЕСТИ НА ОДИН ИЛИ НЕСКОЛЬКО РИСУНКОВ ВСЮ ИНФОРМАЦИЮ ИЗ УСЛОВИЯ ЗАДАНИЯ (РИС. 11.2).

2-Й ЭТАП: ПОИСК ВАРИАНТОВ РЕШЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ АНАЛИЗА РИСУНКОВ. ВЫЧИСЛЕНИЯ.

В тех случаях, когда в задачах идет описание (сравнение) двух фигур, удобен следующий прием:
запишем объемы обеих фигур в виде системы уравнений.

$$\begin{cases} V = S_{осн} \cdot \mathrm{H} = x & \text{– цилиндр (1)} \\ V = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot \mathrm{H} = 27 & \text{– конус (2)} \end{cases}$$

Разделим одно уравнение на другое. Например, (1) на (2):

$$\frac{x}{27} = \frac{1}{1/3} = \frac{3}{1}$$

Тогда $x = \frac{27 \cdot 3}{1} = 81$

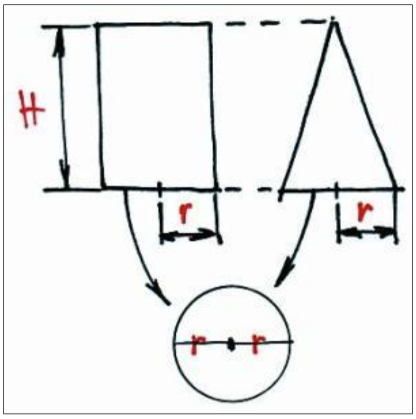


Рисунок 11.2

Внимание! Эту задачу можно решить и с помощью простого рассуждения.
Поскольку площадь основания и высота цилиндра и конуса равны, то их объемы отличаются в 3 раза (объем конуса меньше).
Таким образом, объем цилиндра равен $27 \cdot 3 = 81$.

3-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПРАВИЛЬНОСТЬ ВСЕХ ПРЕДЫДУЩИХ ДЕЙСТВИЙ.

4-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ В ВИДЕ ДЕСЯТИЧНОГО ЧИСЛА.

8	*1*						

B11.3. В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ СОСУДЕ УРОВЕНЬ ЖИДКОСТИ РАВЕН 9 СМ. НА КАКОЙ ВЫСОТЕ БУДЕТ НАХОДИТЬСЯ УРОВЕНЬ ЖИДКОСТИ, ЕСЛИ ЕЕ ПЕРЕЛИТЬ ВО ВТОРОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКИЙ СОСУД, ДИАМЕТР КОТОРОГО В 3 РАЗА БОЛЬШЕ ДИАМЕТРА ПЕРВОГО? ОТВЕТ ВЫРАЗИТЕ В САНТИМЕТРАХ.

1-Й ЭТАП: НАНЕСТИ НА ОДИН ИЛИ НЕСКОЛЬКО РИСУНКОВ ВСЮ ИНФОРМАЦИЮ ИЗ УСЛОВИЯ ЗАДАНИЯ (РИС. 11.3).

Понятно, что радиусы сосудов (как и диаметры) также отличаются в 3 раза.

2-Й ЭТАП: ПОИСК ВАРИАНТОВ РЕШЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ АНАЛИЗА РИСУНКОВ. ВЫЧИСЛЕНИЯ.

Очевидно, что объем воды при переливании не меняется, и он в обоих цилиндрах одинаков: $V_1 = V_2$.

Таким образом:

$\pi r^2 \cdot 9 = \pi (3r)^2 \cdot x$

$\pi r^2 \cdot 9 = \pi 9 r^2 \cdot x$

$x = 1$

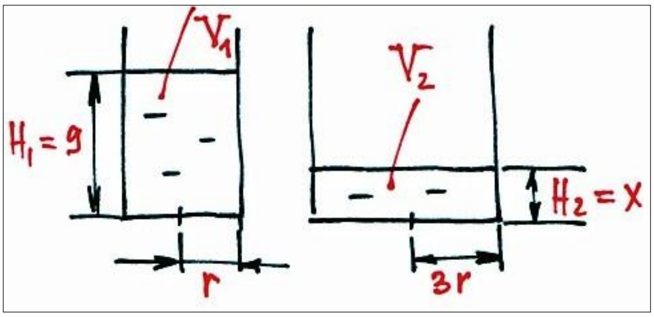


Рисунок 11.3

3-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПРАВИЛЬНОСТЬ ВСЕХ ПРЕДЫДУЩИХ ДЕЙСТВИЙ.

4-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ В ВИДЕ ДЕСЯТИЧНОГО ЧИСЛА.

1							

B11.4. ШАР ОБЪЕМОМ 8 М^3 ВПИСАН В ЦИЛИНДР. НАЙДИТЕ ОБЪЕМ ЦИЛИНДРА (В М^3).

1-Й ЭТАП: НАНЕСТИ НА ОДИН ИЛИ НЕСКОЛЬКО РИСУНКОВ ВСЮ ИНФОРМАЦИЮ ИЗ УСЛОВИЯ ЗАДАНИЯ (РИС. 11.4).

2-Й ЭТАП: ПОИСК ВАРИАНТОВ РЕШЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ АНАЛИЗА РИСУНКОВ. ВЫЧИСЛЕНИЯ.

В этом случае опять удобно решить задачу «способом системы уравнений»:

$$\begin{cases} V_\text{ш} = \frac{4}{3}\pi r^3 = 8 & -\text{шар} \quad (1) \\ V_\text{ц} = S_\text{осн} \cdot \text{H} = \pi r^2 \cdot 2r = x & - \text{цилиндр} \ (2) \end{cases}$$

Разделим одно уравнение на другое. Например, (2) на (1):

$$\frac{x}{8} = \frac{\pi r^2 \cdot 2r \cdot 3}{4\pi r^3} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

Тогда $x = \frac{8 \cdot 3}{2} = \frac{24}{2} = 12$

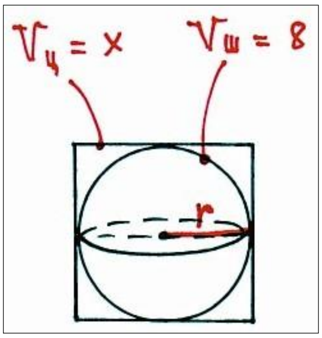


Рисунок 11.4

3-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПРАВИЛЬНОСТЬ ВСЕХ ПРЕДЫДУЩИХ ДЕЙСТВИЙ.

4-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ В ВИДЕ ДЕСЯТИЧНОГО ЧИСЛА.

1	***2***						

B11.5. ОБЪЕМ ЦИЛИНДРА РАВЕН 1 СМ^3. РАДИУС ОСНОВАНИЯ УМЕНЬШИЛИ В 2 РАЗА, А ВЫСОТУ УВЕЛИЧИЛИ В 3 РАЗА. НАЙДИТЕ ОБЪЕМ ПОЛУЧИВШЕГОСЯ ЦИЛИНДРА. ОТВЕТ ДАЙТЕ В СМ^3.

1-Й ЭТАП: НАНЕСТИ НА ОДИН ИЛИ НЕСКОЛЬКО РИСУНКОВ ВСЮ ИНФОРМАЦИЮ ИЗ УСЛОВИЯ ЗАДАНИЯ (РИС. 11.5).

2-Й ЭТАП: ПОИСК ВАРИАНТОВ РЕШЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ АНАЛИЗА РИСУНКОВ. ВЫЧИСЛЕНИЯ.

$$V_1 = S_{\text{осн}1} \cdot \text{H}_1 = \pi r^2 \text{H} = 1$$

$$V_2 = S_{\text{осн}2} \cdot \text{H}_2 = \pi \left(\frac{r}{2}\right)^2 3\text{H} = \frac{3\pi r^2 \text{H}}{4} = x$$

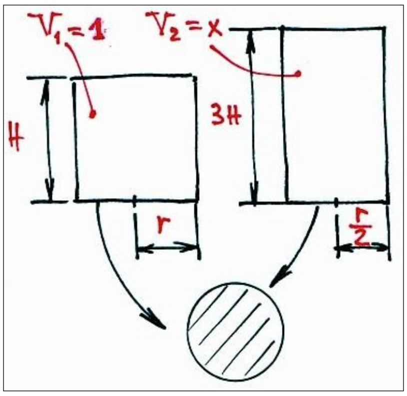


Рисунок 11.5

Разделим одно уравнение на другое. Например, второе на первое:

$$\frac{x}{1}=\frac{3\pi r^2\mathrm{H}}{4\pi r^2\mathrm{H}}=\frac{3}{4}$$

Тогда $x=\frac{1\cdot 3}{4}=\frac{3}{4}=0{,}75.$

3-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПРАВИЛЬНОСТЬ ВСЕХ ПРЕДЫДУЩИХ ДЕЙСТВИЙ.

4-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ В ВИДЕ ДЕСЯТИЧНОГО ЧИСЛА.

0	*,*	*7*	*5*				

B11.6. В ОСНОВАНИИ ПРЯМОЙ ПРИЗМЫ ЛЕЖИТ ПРЯМОУГОЛЬНЫЙ ТРЕУГОЛЬНИК С КАТЕТАМИ 7 И 8. БОКОВЫЕ РЕБРА РАВНЫ $\frac{8}{\pi}$. НАЙДИТЕ ОБЪЕМ ЦИЛИНДРА, ОПИСАННОГО ОКОЛО ЭТОЙ ПРИЗМЫ.

1-Й ЭТАП: НАНЕСТИ НА ОДИН ИЛИ НЕСКОЛЬКО РИСУНКОВ ВСЮ ИНФОРМАЦИЮ ИЗ УСЛОВИЯ ЗАДАНИЯ (РИС. 11.6).

На объемном рисунке трудно показать цилиндр, описанный около (то есть «снаружи») призмы. Но это легко показать на дополнительном рисунке 11.6б (вид сверху).

2-Й ЭТАП: ПОИСК ВАРИАНТОВ РЕШЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ АНАЛИЗА РИСУНКОВ. ВЫЧИСЛЕНИЯ.

Искомый объем цилиндра

$$V=S_{\text{осн}}\cdot\mathrm{H}=\pi r^2\cdot\frac{8}{\pi}=8r^2$$

По теореме Пифагора (рис. 9.6б) найдем r:

$$(2r)^2=7^2+8^2$$

$$4r^2=49+64=113$$

$$r^2=\frac{113}{4}$$

Таким образом, объем цилиндра

$$V=8\cdot\frac{113}{4}=2\cdot 113=226.$$

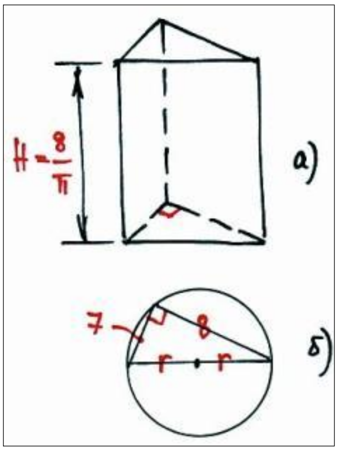


Рисунок 11.6

3-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПРАВИЛЬНОСТЬ ВСЕХ ПРЕДЫДУЩИХ ДЕЙСТВИЙ.

4-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ В ВИДЕ ДЕСЯТИЧНОГО ЧИСЛА.

2	*2*	*6*					

B11.7. КУБИК ВЕСИТ 800 Г. СКОЛЬКО ГРАММОВ БУДЕТ ВЕСИТЬ КУБИК, РЕБРО КОТОРОГО В 2 РАЗА МЕНЬШЕ, ЧЕМ РЕБРО ПЕРВОГО КУБИКА, ЕСЛИ ОБА КУБИКА ИЗГОТОВЛЕНЫ ИЗ ОДИНАКОВОГО МАТЕРИАЛА?

1-Й ЭТАП: НАНЕСТИ НА ОДИН ИЛИ НЕСКОЛЬКО РИСУНКОВ ВСЮ ИНФОРМАЦИЮ ИЗ УСЛОВИЯ ЗАДАНИЯ (РИС. 11.7).

2-Й ЭТАП: ПОИСК ВАРИАНТОВ РЕШЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ АНАЛИЗА РИСУНКОВ. ВЫЧИСЛЕНИЯ.

Поскольку здесь речь идет о массе, придется «привлечь» из физики формулу $m = \rho V$.

И опять окажется полезной система уравнений:

$m_1 = \rho(2\text{a})^3 = 8\rho\text{a}^3 = 800$ (1)

$m_2 = \rho\text{a}^3 = x$ (2)

Разделим одно уравнение на другое:

$$\frac{800}{x} = \frac{8\rho\text{a}^3}{\rho\text{a}^3} = \frac{8}{1}$$

Тогда $x = \frac{800\cdot 1}{8} = 100.$

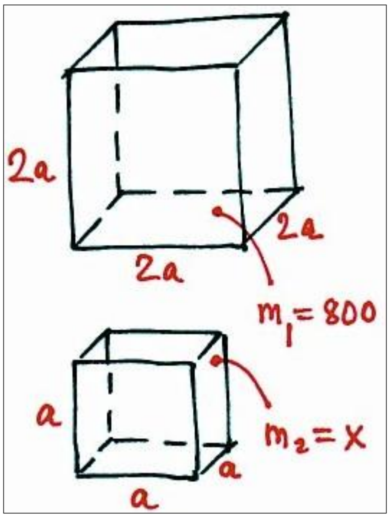


Рисунок 11.7

3-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПРАВИЛЬНОСТЬ ВСЕХ ПРЕДЫДУЩИХ ДЕЙСТВИЙ.

4-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ В ВИДЕ ДЕСЯТИЧНОГО ЧИСЛА.

1	*0*	*0*					

B11.8. БИЛЬЯРДНЫЙ ШАР ВЕСИТ 360 Г. СКОЛЬКО ГРАММОВ БУДЕТ ВЕСИТЬ ШАР ВДВОЕ МЕНЬШЕГО РАДИУСА, СДЕЛАННОГО ИЗ ТОГО ЖЕ МАТЕРИАЛА?

1-Й ЭТАП: НАНЕСТИ НА ОДИН ИЛИ НЕСКОЛЬКО РИСУНКОВ ВСЮ ИНФОРМАЦИЮ ИЗ УСЛОВИЯ ЗАДАНИЯ (РИС. 11.8).

2-Й ЭТАП: ПОИСК ВАРИАНТОВ РЕШЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ АНАЛИЗА РИСУНКОВ. ВЫЧИСЛЕНИЯ.

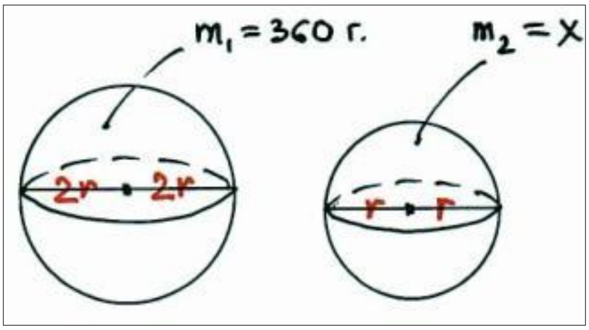


Рисунок 11.8

И опять о массах, на этот раз шаров:

$m = \rho V = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3.$

Привычно составляем систему уравнений:

$m_1 = \frac{4\rho\pi(2r)^3}{3} = 360$ (1)

$m_2 = \frac{4\rho\pi r^3}{3} = x$ (2)

Разделим одно уравнение на другое:

$$\frac{360}{x} = \frac{(2r)^3}{r^3} = \frac{8r^3}{r^3} = \frac{8}{1}$$

Тогда $x = \frac{360\cdot 1}{8} = \frac{360}{8} = \frac{180}{4} = \frac{90}{2} = 45.$

Внимание! Эту, и подобные ей задачи можно решать проще, используя следующее Правило:

a) Если размер каждой стороны плоской фигуры увеличить (уменьшить) в N раз, то ее площадь увеличится (уменьшится) в N^2 раз;

b) Если размер каждой стороны объемной фигуры увеличить (уменьшить) в N раз, то ее объем увеличится (уменьшится) в N^3 раз.

Пример 1: если сторону равностороннего треугольника увеличить в 3 раза, то его площадь увеличится в $3^2 = 9$ раз.

Пример 2: если сторону квадрата уменьшить в 2 раза, то его площадь уменьшится в $2^2 = 4$ раз.

Пример 3: если радиус шара увеличить в 4 раза, то его объем увеличится в $4^3 = 64$ раз.

Пример 4: если сторону правильного тетраэдра (правильной 4-х гранной пирамиды) уменьшить в 2 раза, то его объем уменьшится в $2^3 = 8$ раз.

Таким образом, для нашей задачи рассуждение будет таково:
«Поскольку радиус шара уменьшился в 2 раза, то его объем уменьшился в $2^3 = 8$ раз.
Следовательно, его масса также уменьшится в 8 раз, и станет равной $360 : 8 = 45$ г». Вот и все!

Кстати, так же можно было решать и задачу В11.7.

3-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПРАВИЛЬНОСТЬ ВСЕХ ПРЕДЫДУЩИХ ДЕЙСТВИЙ.

4-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ В ВИДЕ ДЕСЯТИЧНОГО ЧИСЛА.

4	*5*						

B11.9. В ОСНОВАНИИ ПРЯМОЙ ПРИЗМЫ ЛЕЖИТ КВАДРАТ СО СТОРОНОЙ 10. БОКОВЫЕ РЕБРА РАВНЫ $\frac{3}{\pi}$. НАЙДИТЕ ОБЪЕМ ЦИЛИНДРА, ОПИСАННОГО ОКОЛО ЭТОЙ ПРИЗМЫ.

1-Й ЭТАП: НАНЕСТИ НА ОДИН ИЛИ НЕСКОЛЬКО РИСУНКОВ ВСЮ ИНФОРМАЦИЮ ИЗ УСЛОВИЯ ЗАДАНИЯ (РИС. 11.9).

Вид сверху на эти фигуры представлен на рис. 11.9б.

2-Й ЭТАП: ПОИСК ВАРИАНТОВ РЕШЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ АНАЛИЗА РИСУНКОВ. ВЫЧИСЛЕНИЯ.

Объем цилиндра $V = S_{\text{осн}} \cdot \mathrm{H} = \pi r^2 \cdot \frac{3}{\pi} = 3r^2$.

По теореме Пифагора (рис. 9.9б) найдем r^2:

$(2r)^2 = 10^2 + 10^2$

$4r^2 = 200$

$r^2 = \frac{200}{4} = 50$

Таким образом, объем цилиндра $V = 3r^2 = 3 \cdot 50 = 150$.

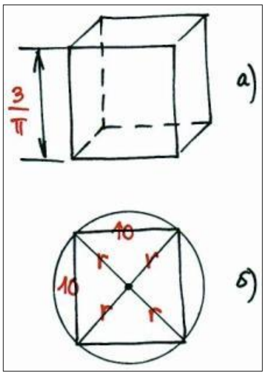


Рисунок 11.9

3-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПРАВИЛЬНОСТЬ ВСЕХ ПРЕДЫДУЩИХ ДЕЙСТВИЙ.

4-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ В ВИДЕ ДЕСЯТИЧНОГО ЧИСЛА.

1	*5*	*0*					

B11.10. ОБЪЕМ ДАННОГО ПРАВИЛЬНОГО ТЕТРАЭДРА РАВЕН 2 $см^3$. НАЙДИТЕ ОБЪЕМ ПРАВИЛЬНОГО ТЕТРАЭДРА, РЕБРО КОТОРОГО В 3 РАЗА БОЛЬШЕ РЕБРА ДАННОГО ТЕТРАЭДРА. ОТВЕТ ДАЙТЕ В $см^3$.

Внимание! Правильной называется объемная фигура, основанием которой является равносторонний треугольник, квадрат, и так далее (то есть все стороны в этих основаниях равны).

1-Й ЭТАП: ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЭТОЙ ЗАДАЧИ ВОСПОЛЬЗУЕМСЯ ПРАВИЛОМ, ОПИСАННЫМ ВЫШЕ.

«Поскольку ребро тетраэдра увеличилось в 3 раза, то его объем увеличится в $3^3 = 27$ раз.
И станет равным $2 \cdot 27 = 54.$ Ответ: 54».

Просто? Проще не бывает!!!

2-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПРАВИЛЬНОСТЬ ВСЕХ ПРЕДЫДУЩИХ ДЕЙСТВИЙ.

3-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ В ВИДЕ ДЕСЯТИЧНОГО ЧИСЛА.

5	*4*						

И, напоследок, решим еще одну задачку.

В11.11. **РАДИУС ОСНОВАНИЯ ПЕРВОГО КОНУСА В 2 РАЗА МЕНЬШЕ, ЧЕМ РАДИУС ОСНОВАНИЯ ВТОРОГО КОНУСА, А ОБРАЗУЮЩАЯ ПЕРВОГО КОНУСА В 3 РАЗА БОЛЬШЕ, ЧЕМ ОБРАЗУЮЩАЯ ВТОРОГО. ЧЕМУ РАВНА ПЛОЩАДЬ БОКОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ ПЕРВОГО КОНУСА, ЕСЛИ ПЛОЩАДЬ БОКОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО РАВНА 22СМ^2. ОТВЕТ ДАЙТЕ В СМ^2.**

А вот задача с новым, еще не встречавшимся словосочетанием – «образующая конуса»
(на рис. 11.11 она обозначена как l и $3l$).
Кроме того упоминается площадь боковой поверхности конуса $S_б$
(для более удобного обозрения она показана на рис. 11.11б в развернутом виде).

Формулу $S_б$ можно, при необходимости, каждый раз выводить самостоятельно, но гораздо лучше будет «тупо запомнить»: $\boldsymbol{S_б = \pi r l}$
(где r – радиус основания конуса, l – длина его образующей).

1-Й ЭТАП: НАНЕСТИ НА ОДИН ИЛИ НЕСКОЛЬКО РИСУНКОВ ВСЮ ИНФОРМАЦИЮ ИЗ УСЛОВИЯ ЗАДАНИЯ (РИС. 11.11).

2-Й ЭТАП: ПОИСК ВАРИАНТОВ РЕШЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ АНАЛИЗА РИСУНКОВ. ВЫЧИСЛЕНИЯ.

Поскольку в задаче идет речь о площади боковой поверхности двух конусов, распишем их формулы и сведем в систему.

$S_{б1} = x = \pi \cdot r \cdot 3l$ (1)

$S_{б2} = 22 = \pi \cdot 2r \cdot l$ (2)

Разделим одно уравнение на другое.
Например, (1) на (2):

$$\frac{x}{22} = \frac{3}{2}$$

$x = S_{б1} = \frac{22 \cdot 3}{2} = 33\ (\text{см}^2)$.

Это и есть ответ.

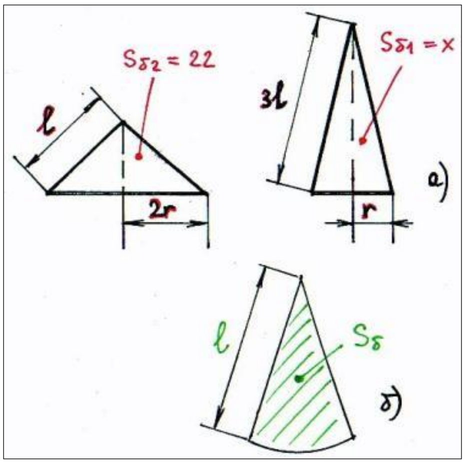


Рисунок 11.11

3-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПРАВИЛЬНОСТЬ ВСЕХ ПРЕДЫДУЩИХ ДЕЙСТВИЙ.

4-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ В ВИДЕ ДЕСЯТИЧНОГО ЧИСЛА.

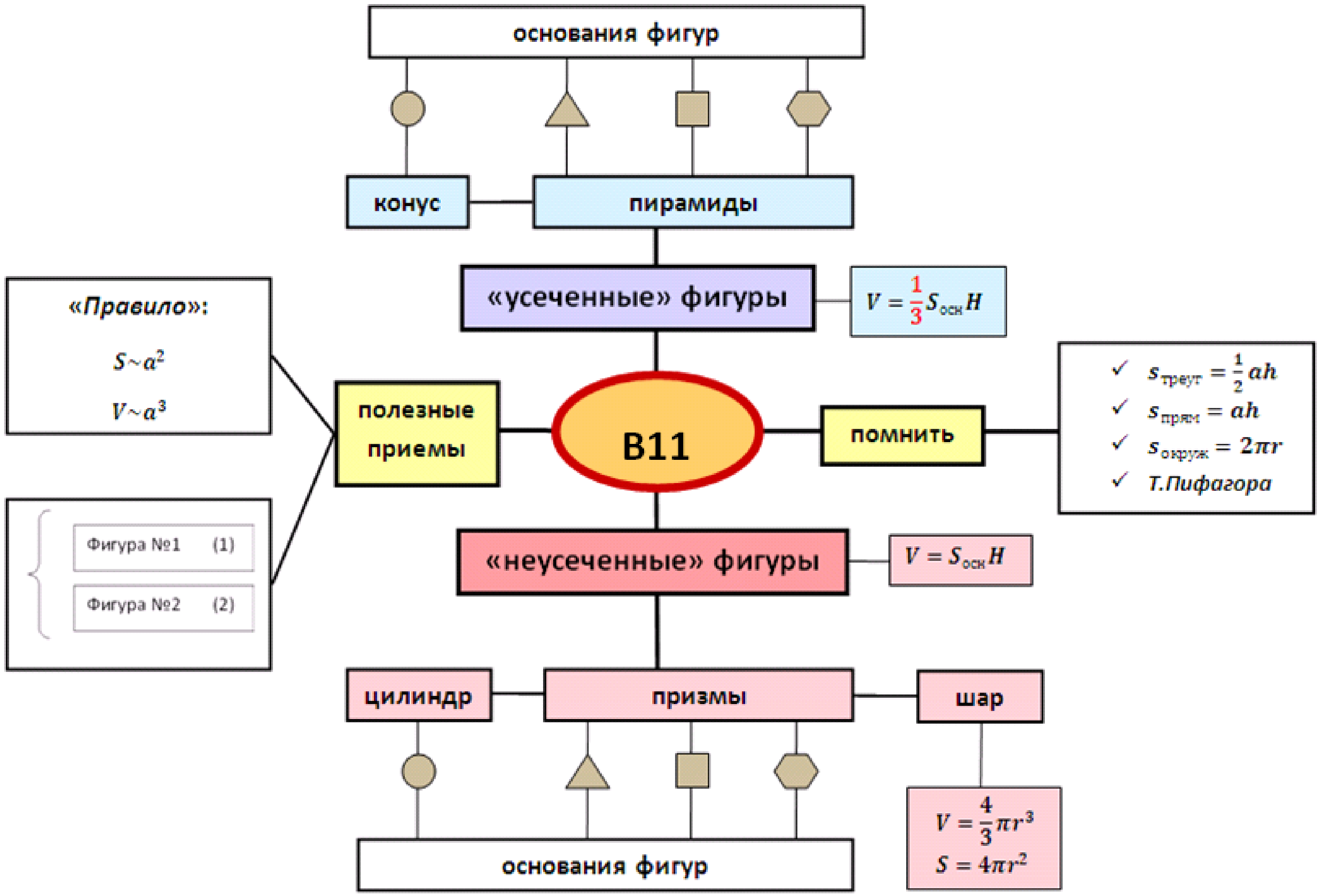
3	3						

Задания В11 экзамена, судя по обзору «Открытого банка заданий по математике», могут быть довольно разнообразными, но основной подход к их решению уже понятен из рассмотренных примеров.

Обязательное условие для их правильного понимания и успешного решения – это, как и во многих других заданиях, составление самого обыкновенного рисунка!

Успешного вам рисования!

И, по сложившейся традиции, законспектируем задание В11 очередной картинкой.


основания фигур
конус
пирамиды
«усеченные» фигуры
$V = \frac{1}{3} S_{осн} H$
«Правило»:
$S \sim a^2$
$V \sim a^3$
полезные приемы
B11
помнить
$S_{треуг} = \frac{1}{2} ah$
$S_{прям} = ah$
$S_{окруж} = 2\pi r$
Т.Пифагора
Фигура №1 (1)
Фигура №2 (2)
«неусеченные» фигуры
$V = S_{осн} H$
цилиндр
призмы
шар
$V = \frac{4}{3}\pi r^3$
$S = 4\pi r^2$
основания фигур

ЕГЭ-2012: ЗАДАНИЕ B12

По замыслу разработчиков ЕГЭ, задания B12 являются «практико-ориентированными». То есть такими заданиями, которые якобы встречаются на практике (в жизни). Или, по крайней мере, могут встретиться. Или не совсем такие, но очень похожие…

В этих задачах «из жизни» встречаются самые разные сюжеты: мальчик, бросающий камни в колодец с целью определить его глубину (!) с помощью откуда-то взятой формулы; некий электрический прибор, который через определенное время нужно непременно выключать из розетки, чтобы он не перегорел (!) и многие другие забавности.

Видимо, таким образом показывается ценность математики в решении прикладных, житейских задач. Однако, сдающие ЕГЭ по математике на заданиях B12, как правило, получают лишнюю «головную боль». А именно: они вынуждены продираться сквозь смысл физических, экономических и других терминов, которыми напичканы эти задания. Кому-то это дается легко, кому-то труднее. Но для многих суть задачи остается «условно понятной»: то есть каждое слово по отдельности понятно, а все вместе – не очень ☺.

Так или иначе, но здесь присутствуют дополнительные трудности, не связанные с собственно сдаваемой математикой.

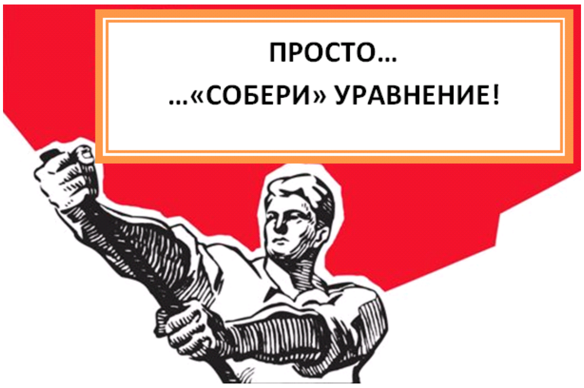
Чтобы преодолеть эти трудности непонимания, весьма полезно помнить следующее: практически все эти задания сводятся к решению самых обычных квадратных уравнений или квадратных неравенств. Таким образом, даже не особо понимая суть условия, нужно стремиться «собрать» из него (но не совсем уж наугад!) выражение вида
$ax^2+bx+c=0$ или $ax^2+bx+c \lesseqgtr 0$.
Это и есть тот своеобразный маяк, на который нужно заранее ориентироваться.

Далее. Многие задания B12, особенно «физические», содержат величины, которые не могут быть «любыми» (например, электрическое сопротивление не может быть отрицательным). Такие моменты нужно обязательно учитывать при анализе полученных корней уравнений, и после этого отбрасывать непригодные. То, что правильно и грамотно с точки зрения математики, может быть абсурдно с точки зрения физического содержания задачи. Примеры такого рода задач будут показаны ниже.

И последнее. К сожалению, встречаются задачи, содержание которых (или задаваемый вопрос) допускают двоякое толкование. Или содержат заведомо лишнюю информацию (в том числе цифры), мешающую их пониманию, что в прежние, «менее прогрессивные» времена, считалось недопустимым. Образец такой задачи (B12.10) специально приведен для примера. Это «мутные» задачи, «задачи – диверсии». Таких задач, в идеале, не должно быть вообще.
По крайней мере – на ЕГЭ. Чего вам и желаю!

А теперь самое главное, ради чего и было сделано вступление – практические примеры.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАНИЙ В12



В12.1. В РОЗЕТКУ ЭЛЕКТРОСЕТИ ПОДКЛЮЧЕНЫ ПРИБОРЫ, ОБЩЕЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ КОТОРЫХ СОСТАВЛЯЕТ 90 ОМ. ПАРАЛЛЕЛЬНО С НИМИ В РОЗЕТКУ ПРЕДПОЛАГАЕТСЯ ПОДКЛЮЧИТЬ ЭЛЕКТРООБОГРЕВАТЕЛЬ. ОПРЕДЕЛИТЕ (В ОМАХ) НАИМЕНЬШЕЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ ЭТОГО ЭЛЕКТРООБОГРЕВАТЕЛЯ, ЕСЛИ ИЗВЕСТНО, ЧТО ПРИ ПАРАЛЛЕЛЬНОМ СОЕДИНЕНИИ ДВУХ ПРОВОДНИКОВ С СОПРОТИВЛЕНИЯМИ R_1 И R_2 ИХ ОБЩЕЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ ЗАДАЕТСЯ ФОРМУЛОЙ $R=\frac{R_1 . R_2}{R_1+R_2}$, А ДЛЯ НОРМАЛЬНОГО ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ ЭЛЕКТРОСЕТИ ОБЩЕЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ В НЕЙ ДОЛЖНО БЫТЬ НЕ МЕНЬШЕ 40 ОМ.

1-Й ЭТАП: АНАЛИЗ УСЛОВИЯ ЗАДАЧИ, СОСТАВЛЕНИЕ УРАВНЕНИЯ (ИЛИ НЕРАВЕНСТВА) И ЕГО РЕШЕНИЕ (ДЛЯ УДОБСТВА ЕГО МОЖНО ПРИВЕСТИ К ПРИВЫЧНОМУ «МАТЕМАТИЧЕСКОМУ» ВИДУ). АНАЛИЗ ПОЛУЧЕННОГО ОТВЕТА.

Из условия понятно, что параллельно включены два прибора: с сопротивлением $R_1=90$ Ом и $R_2=x>0$. По условию $R=\frac{R_1 . R_2}{R_1+R_2}\geq 40$ («не меньше 40»).

Приведем неравенство к более привычному, математическому виду: $\frac{90x}{90+x}\geq 40.$

$$\frac{90x}{90+x}-40\geq 0$$

$$\frac{90x-40(90+x)}{90+x}\geq 0$$

Так как $90+x>0$ (сопротивление x может быть только положительным), то

$$50x-3600\geq 0$$

$$50x\geq 3600$$

$$5x\geq 360$$

$$x\geq 72$$

Таким образом, $R_2 = x \geq 72$.

Поскольку спрашивается наименьшее значение сопротивления, выбираем из найденного интервала число 72 (рис. 12.1).

Внимание! Правильным для этой задачи является составление и последующее решение именно неравенства (как и было сделано выше). Однако на практике для получения правильного ответа достаточно было решить уравнение $50x - 3600 = 0$, и записать в ответ его корень $x = 72$.

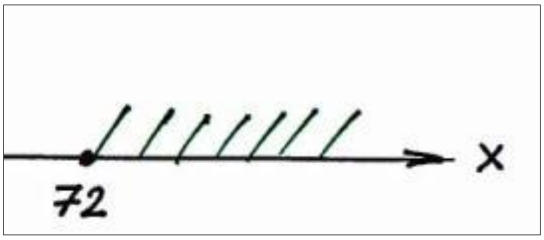


Рисунок 12.1

2-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПРАВИЛЬНОСТЬ ВСЕХ ПРЕДЫДУЩИХ ДЕЙСТВИЙ.

3-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ В ВИДЕ ДЕСЯТИЧНОГО ЧИСЛА.

7	*2*						

B12.2. ДЛЯ ОДНОГО ИЗ ПРЕДПРИЯТИЙ – МОНОПОЛИСТОВ ЗАВИСИМОСТЬ ОБЪЕМА СПРОСА НА ПРОДУКЦИЮ q (ЕДИНИЦ В МЕСЯЦ) ОТ ЕЕ ЦЕНЫ p (ТЫС. РУБ.) ЗАДАЕТСЯ ФОРМУЛОЙ $q = 180 - 10p$. ОПРЕДЕЛИТЕ МАКСИМАЛЬНЫЙ УРОВЕНЬ ЦЕНЫ (В ТЫС. РУБ.), ПРИ КОТОРОМ ЗНАЧЕНИЕ ВЫРУЧКИ ПРЕДПРИЯТИЯ ЗА МЕСЯЦ $r = q \cdot p$ СОСТАВИТ НЕ МЕНЕЕ 720 ТЫС. РУБ.

1-Й ЭТАП: АНАЛИЗ УСЛОВИЯ ЗАДАЧИ, СОСТАВЛЕНИЕ УРАВНЕНИЯ (ИЛИ НЕРАВЕНСТВА) И ЕГО РЕШЕНИЕ (ДЛЯ УДОБСТВА ЕГО МОЖНО ПРИВЕСТИ К ПРИВЫЧНОМУ «МАТЕМАТИЧЕСКОМУ» ВИДУ). АНАЛИЗ ПОЛУЧЕННОГО ОТВЕТА.

Не пытаясь понять глубоко суть условия, тем не менее, можно записать следующее:

$q = 180 - 10p$

$r = q \cdot p = p(180 - 10p)$

По условию $r \geq 720000$, то есть $p(180 - 10p) \geq 720000$

Чтобы облегчить вычисления, запишем вместо 720000 число 720 (тем более, что ответ все равно нужно выразить не в рублях, а в тысячах рублей). Перейдем для удобства к привычному, «математическому» написанию последней формулы:

$x(180 - 10x) \geq 720$

$180x - 10x^2 - 720 \geq 0$

$10x^2 - 180x + 720 \leq 0$

$x^2 - 18x + 72 \leq 0$

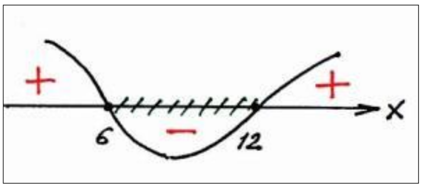


Рисунок 12.2

Найдем корни уравнения $x^2 - 18x + 72 = 0.$

$$x = \frac{18 \pm \sqrt{18^2 - 4 \cdot 72}}{2} = \frac{18 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{18 \pm 6}{2}$$

$x_1 = 6,\qquad x_2 = 12.$

График функции $x^2 - 18x + 72$ – парабола вида «ветви вверх» (коэффициент при x^2 положительный).

Поскольку нужно найти максимальное значение p, выбираем из найденного интервала число 12 (рис. 12.2).

Внимание! Правильным для этой задачи является составление и последующее решение именно квадратного неравенства (как и было сделано выше). Однако на практике для получения правильного ответа достаточно было решить уравнение $180x - 10x^2 - 720 = 0$, и записать в ответ его больший корень $x = 12$.

2-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПРАВИЛЬНОСТЬ ВСЕХ ПРЕДЫДУЩИХ ДЕЙСТВИЙ.

3-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ В ВИДЕ ДЕСЯТИЧНОГО ЧИСЛА.

1	*2*						

B12.3. ЗАВИСИМОСТЬ ТЕМПЕРАТУРЫ (В ГРАДУСАХ КЕЛЬВИНА) ОТ ВРЕМЕНИ(В МИНУТАХ) ДЛЯ НАГРЕВАТЕЛЬНОГО ЭЛЕМЕНТА НЕКОТОРОГО ПРИБОРА БЫЛА ПОЛУЧЕНА ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНО И НА ИССЛЕДУЕМОМ ИНТЕРВАЛЕ ТЕМПЕРАТУР ЗАДАЕТСЯ ВЫРАЖЕНИЕМ $\boldsymbol{T(t) = T_0 + at + bt^2}$, ГДЕ $\boldsymbol{T_0 = 980}$ К, $\boldsymbol{a = 30}$ К/МИН, $\boldsymbol{b = -0,2}$ К/МИН$^{\boldsymbol{2}}$. ИЗВЕСТНО, ЧТО ПРИ ТЕМПЕРАТУРАХ НАГРЕВАТЕЛЯ СВЫШЕ 1500 К ПРИБОР МОЖЕТ ИСПОРТИТЬСЯ, ПОЭТОМУ ЕГО НУЖНО ОТКЛЮЧАТЬ. ОПРЕДЕЛИТЕ (В МИНУТАХ) ЧЕРЕЗ КАКОЕ НАИБОЛЬШЕЕ ВРЕМЯ ПОСЛЕ НАЧАЛА РАБОТЫ НУЖНО ОТКЛЮЧАТЬ ПРИБОР.

1-Й ЭТАП: АНАЛИЗ УСЛОВИЯ ЗАДАЧИ, СОСТАВЛЕНИЕ УРАВНЕНИЯ (ИЛИ НЕРАВЕНСТВА) И ЕГО РЕШЕНИЕ (ДЛЯ УДОБСТВА ЕГО МОЖНО ПРИВЕСТИ К ПРИВЫЧНОМУ «МАТЕМАТИЧЕСКОМУ» ВИДУ). АНАЛИЗ ПОЛУЧЕННОГО ОТВЕТА.

Подставляем значения коэффициентов в исходное уравнение, и учитываем ограничения температуры
(она должна быть не более 1500 К).

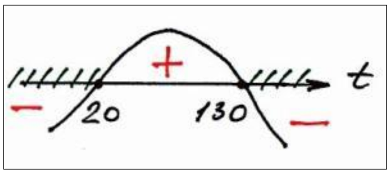


Рисунок 12.3

$$T(t) = 980 + 30t - 0{,}2t^2 \leq 1500$$

$$980 + 30t - 0{,}2t^2 - 1500 \leq 0$$

$$-0{,}2t^2 + 30t - 520 \leq 0$$

Найдем корни уравнения $-0{,}2t^2 + 30t - 520 = 0.$

$$t = \frac{-30 \pm \sqrt{30^2 - 4 \cdot 0{,}2 \cdot 520}}{-0{,}4} = \frac{-30 \pm \sqrt{484}}{-0{,}4} = \frac{-30 \pm 22}{-0{,}4}$$

$t_1 = 20, \qquad t_2 = 130.$

График функции $-0{,}2t^2 + 30t - 520$ – парабола вида «ветви вниз» (коэффициент при x^2 отрицательный).

«Математически» мы получаем в качестве ответа два интервала.
Однако по смыслу задачи ясно, что после 20-й минуты этот загадочный прибор перегреется (пора срочно выключать, иначе до 130-й минуты он может вообще «не дожить»!).
Поэтому выбираем из левого интервала наибольшее значение: 20 (рис. 12.3).

Внимание! Правильным для этой задачи является составление и последующее решение именно квадратного неравенства (как и было сделано выше). Однако на практике для получения правильного ответа достаточно было решить уравнение $T(t) = 980 + 30t - 0{,}2t^2 = 1500$, и записать в ответ его единственно возможный (но это нужно еще сообразить!) корень $t = 20$.

2-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПРАВИЛЬНОСТЬ ВСЕХ ПРЕДЫДУЩИХ ДЕЙСТВИЙ.

3-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ В ВИДЕ ДЕСЯТИЧНОГО ЧИСЛА.

2	***0***						

B12.4. КОЭФФИЦИЕНТ ПОЛЕЗНОГО ДЕЙСТВИЯ НЕКОТОРОГО ДВИГАТЕЛЯ ОПРЕДЕЛЯЕТСЯ ФОРМУЛОЙ $\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \cdot 100\%$. ПРИ КАКОМ НАИМЕНЬШЕМ ЗНАЧЕНИИ ТЕМПЕРАТУРЫ НАГРЕВАТЕЛЯ T_1 КПД ЭТОГО ДВИГАТЕЛЯ БУДЕТ НЕ МЕНЬШЕ 70%, ЕСЛИ ТЕМПЕРАТУРА ХОЛОДИЛЬНИКА $T_2 = 150$?

1-Й ЭТАП: АНАЛИЗ УСЛОВИЯ ЗАДАЧИ, СОСТАВЛЕНИЕ УРАВНЕНИЯ (ИЛИ НЕРАВЕНСТВА) И ЕГО РЕШЕНИЕ (ДЛЯ УДОБСТВА ЕГО МОЖНО ПРИВЕСТИ К ПРИВЫЧНОМУ «МАТЕМАТИЧЕСКОМУ» ВИДУ). АНАЛИЗ ПОЛУЧЕННОГО ОТВЕТА.

Произведем понятные замены и «перейдем к математике», учитывая, что по смыслу задачи $T_1 = x > 0$.

$\frac{x-150}{x} \cdot 100 \geq 70$

$$\frac{x-150}{x} \geq 0{,}7$$

$x - 150 \geq 0{,}7x$

$x - 0{,}7x \geq 150$

$$x \geq \frac{150}{0{,}3} = \frac{1500}{3} = 500$$

$x \geq 500$

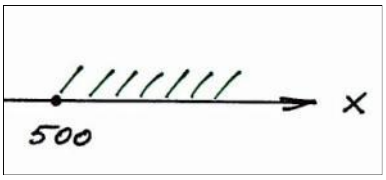


Рисунок 12.4

Выбираем «наименьшее» из решений неравенства, то есть число 500 (рис. 12.4).

Внимание! Правильным для этой задачи является составление и последующее решение именно неравенства (как и было сделано). Однако на практике для получения правильного ответа достаточно было решить уравнение $\frac{x-150}{x} \cdot 100 = 70$, и записать в ответ его корень $x = 500$.

2-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПРАВИЛЬНОСТЬ ВСЕХ ПРЕДЫДУЩИХ ДЕЙСТВИЙ.

3-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ В ВИДЕ ДЕСЯТИЧНОГО ЧИСЛА.

5	*0*	*0*					

B12.5. К БОКОВОЙ СТЕНКЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО БАКА ВБЛИЗИ ДНА ЗАКРЕПЛЕН КРАН. ПОСЛЕ ЕГО ОТКРЫТИЯ ВОДА НАЧИНАЕМ ВЫТЕКАТЬ ИЗ БАКА, ПРИ ЭТОМ ВЫСОТА СТОЛБА ВОДЫ В НЕМ МЕНЯЕТСЯ ПО ЗАКОНУ $h(t) = 3,2 - 1,44t + 0,16t^2$ (h – ВЫСОТА В МЕТРАХ),
ГДЕ t - ВРЕМЯ В МИНУТАХ.
В ТЕЧЕНИЕ КАКОГО ВРЕМЕНИ ВОДА БУДЕТ ВЫТЕКАТЬ ИЗ БАКА?

1-Й ЭТАП: АНАЛИЗ УСЛОВИЯ ЗАДАЧИ, СОСТАВЛЕНИЕ УРАВНЕНИЯ (ИЛИ НЕРАВЕНСТВА) И ЕГО РЕШЕНИЕ (ДЛЯ УДОБСТВА ЕГО МОЖНО ПРИВЕСТИ К ПРИВЫЧНОМУ «МАТЕМАТИЧЕСКОМУ» ВИДУ). АНАЛИЗ ПОЛУЧЕННОГО ОТВЕТА.

Нужно сообразить, что когда вся вода вытечет, ее уровень станет равным нулю, то есть $h(t) = 0$. Таким образом, решение задачи сводится именно к этому уравнению:

$$0{,}16t^2 - 1{,}44t + 3{,}2 = 0$$

$$16t^2 - 144t + 320 = 0$$

$$8t^2 - 72t + 160 = 0$$

$$t^2 - 9t + 20 = 0$$

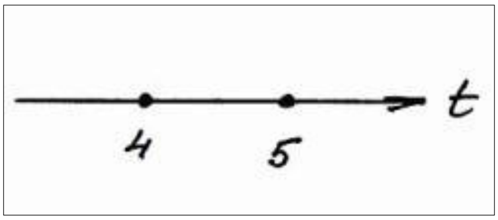


Рисунок 12.5

Найдем корни уравнения:

$$t = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 4 \cdot 1 \cdot 20}}{2} = \frac{9 \pm 1}{2}$$

$t_1 = 4,$ $\qquad t_2 = 5.$

«Математически» исходное уравнение имеет два корня (рис. 12.5).
Но физически 2-й корень не имеет смысла: вода не сможет закончиться в баке дважды – сначала через 4 минуты, а затем через 5 минут! Поэтому выбираем меньший корень: $t = 4$.

2-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПРАВИЛЬНОСТЬ ВСЕХ ПРЕДЫДУЩИХ ДЕЙСТВИЙ.

3-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ В ВИДЕ ДЕСЯТИЧНОГО ЧИСЛА.

4							

B12.6. ЕСЛИ НАБЛЮДАТЕЛЬ НАХОДИТСЯ НА НЕБОЛЬШОЙ ВЫСОТЕ h НАД ПОВЕРХНОСТЬЮ ЗЕМЛИ, ТО РАССТОЯНИЕ ОТ НЕГО ДО ЛИНИИ ГОРИЗОНТА МОЖНО НАЙТИ ПО ФОРМУЛЕ $l = \sqrt{2Rh}$, ГДЕ $R = 6400$ КМ – РАДИУС ЗЕМЛИ. НАЙДИТЕ НАИМЕНЬШУЮ ВЫСОТУ, С КОТОРОЙ ДОЛЖЕН СМОТРЕТЬ НАБЛЮДАТЕЛЬ, ЧТОБЫ ОН ВИДЕЛ ЛИНИЮ ГОРИЗОНТА НА РАССТОЯНИИ НЕ МЕНЕЕ 6,4 КМ? (ОТВЕТ ВЫРАЗИТЕ В МЕТРАХ).

1-Й ЭТАП: АНАЛИЗ УСЛОВИЯ ЗАДАЧИ, СОСТАВЛЕНИЕ УРАВНЕНИЯ (ИЛИ НЕРАВЕНСТВА) И ЕГО РЕШЕНИЕ (ДЛЯ УДОБСТВА ЕГО МОЖНО ПРИВЕСТИ К ПРИВЫЧНОМУ «МАТЕМАТИЧЕСКОМУ» ВИДУ). АНАЛИЗ ПОЛУЧЕННОГО ОТВЕТА.

Итак, $l = \sqrt{2Rh} \geq 6{,}4$

$\left(\sqrt{2Rh}\right)^2 \geq 6{,}4^2$

$2Rh \geq 6{,}4 \cdot 6{,}4$

$h \geq \frac{6{,}4 \cdot 6{,}4}{6400 \cdot 2} = \frac{1 \cdot 3{,}2}{1000} = \frac{3{,}2}{1000} = 0{,}0032$ (км). Таким образом, $h \geq 3{,}2$ метров.

Минимальное значение высоты $h = 3{,}2$ метров.

Внимание! Правильным для этой задачи является составление и последующее решение именно неравенства (как и было сделано). Однако на практике для получения правильного ответа достаточно было решить уравнение $l = \sqrt{2Rh} = 6{,}4$, и записать в ответ его корень $h = 3{,}2$.

2-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПРАВИЛЬНОСТЬ ВСЕХ ПРЕДЫДУЩИХ ДЕЙСТВИЙ.

3-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ В ВИДЕ ДЕСЯТИЧНОГО ЧИСЛА.

3	***,***	***2***					

В12.7. МАССА РАДИОАКТИВНОГО ВЕЩЕСТВА УМЕНЬШАЕТСЯ ПО ЗАКОНУ $m(t) = m_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}$. В ЛАБОРАТОРИИ ПОЛУЧИЛИ ВЕЩЕСТВО, СОДЕРЖАЩЕЕ $m_0 = 12$ МГ ИЗОТОПА МЕДИ-64, ПЕРИОД ПОЛУРАСПАДА КОТОРОГО T РАВЕН 12,8 Ч. В ТЕЧЕНИЕ СКОЛЬКИХ ЧАСОВ КОЛИЧЕСТВО ИЗОТОПА МЕДИ-64 В ВЕЩЕСТВЕ БУДЕТ ПРЕВОСХОДИТЬ 3 МГ?

1-Й ЭТАП: АНАЛИЗ УСЛОВИЯ ЗАДАЧИ, СОСТАВЛЕНИЕ УРАВНЕНИЯ (ИЛИ НЕРАВЕНСТВА) И ЕГО РЕШЕНИЕ (ДЛЯ УДОБСТВА ЕГО МОЖНО ПРИВЕСТИ К ПРИВЫЧНОМУ «МАТЕМАТИЧЕСКОМУ» ВИДУ). АНАЛИЗ ПОЛУЧЕННОГО ОТВЕТА.

Понятно, что искомое время вычисляется из неравенства $m(t) = m_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}} > 3.$

Причем достаточно будет решить даже уравнение $m_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}} = 3.$

$$12 \cdot 2^{-\frac{t}{12,8}} = 3$$

$$2^{-\frac{t}{12,8}} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4} = \frac{1}{2^2} = 2^{-2}$$

$$2^{-\frac{t}{12,8}} = 2^{-2}$$

$$-\frac{t}{12,8} = -2$$

$$t = 2 \cdot 12,8 = 25,6$$

Таким образом, через $t = 25,6$ ч. масса изотопа уменьшится до 3 мг.

2-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПРАВИЛЬНОСТЬ ВСЕХ ПРЕДЫДУЩИХ ДЕЙСТВИЙ.

3-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ В ВИДЕ ДЕСЯТИЧНОГО ЧИСЛА.

2	5	,	6				

B12.8. ЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ЦЕПЬ НАПРЯЖЕНИЕМ 220 В ЗАЩИЩЕНА ПРЕДОХРАНИТЕЛЕМ, РАССЧИТАННЫМ НА СИЛУ ТОКА 8 А. НАЙДИТЕ НАИМЕНЬШЕЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ, КОТОРОЕ МОЖЕТ БЫТЬ У ЭЛЕКТРОПРИБОРА, ВКЛЮЧЕННОГО В ЭТУ ЦЕПЬ, ЧТОБЫ ПРЕДОХРАНИТЕЛЬ ПРОДОЛЖАЛ РАБОТАТЬ. СИЛА ТОКА В ЦЕПИ I СВЯЗАНА С НАПРЯЖЕНИЕМ U СООТНОШЕНИЕМ $I = \frac{U}{R}$, ГДЕ R – СОПРОТИВЛЕНИЕ ЭЛЕКТРОПРИБОРА (ОТВЕТ ВЫРАЗИТЕ В ОМАХ).

1-Й ЭТАП: АНАЛИЗ УСЛОВИЯ ЗАДАЧИ, СОСТАВЛЕНИЕ УРАВНЕНИЯ (ИЛИ НЕРАВЕНСТВА) И ЕГО РЕШЕНИЕ (ДЛЯ УДОБСТВА ЕГО МОЖНО ПРИВЕСТИ К ПРИВЫЧНОМУ «МАТЕМАТИЧЕСКОМУ» ВИДУ). АНАЛИЗ ПОЛУЧЕННОГО ОТВЕТА.

По мере уменьшения знаменателя (R) при постоянном числителе (U), сила тока будет возрастать. Минимально возможное сопротивление будет соответствовать максимальному значению тока. Найдем его из уравнения

$$8 = \frac{200}{R_{min}} :$$

$$R_{min} = \frac{220}{8} = \frac{110}{4} = \frac{55}{2} = 27{,}5 \text{ (Ом)}.$$

2-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПРАВИЛЬНОСТЬ ВСЕХ ПРЕДЫДУЩИХ ДЕЙСТВИЙ.

3-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ В ВИДЕ ДЕСЯТИЧНОГО ЧИСЛА.

2	*7*	*,*	**5**				

B12.9. ПРИ ТЕМПЕРАТУРЕ $0°C$ РЕЛЬС ИМЕЕТ ДЛИНУ $l_0 = 10$ М. ПРИ ВОЗРАСТАНИИ ТЕМПЕРАТУРЫ ПРОИСХОДИТ ТЕПЛОВОЕ РАСШИРЕНИЕ РЕЛЬСА, И ЕГО ДЛИНА, ВЫРАЖЕННАЯ В МЕТРАХ, МЕНЯЕТСЯ ПО ЗАКОНУ $l(t°) = l_0(1 + \alpha \cdot t°)$, ГДЕ $\alpha = 1,2 \cdot 10^{-5}(°C)$ — КОЭФФИЦИЕНТ ТЕПЛОВОГО РАСШИРЕНИЯ, $t°$ — ТЕМПЕРАТУРА (В ГРАДУСАХ ЦЕЛЬСИЯ). ПРИ КАКОЙ ТЕМПЕРАТУРЕ РЕЛЬС УДЛИНИТСЯ НА 6 ММ? ОТВЕТ ВЫРАЗИТЕ В ГРАДУСАХ ЦЕЛЬСИЯ.

1-Й ЭТАП: АНАЛИЗ УСЛОВИЯ ЗАДАЧИ, СОСТАВЛЕНИЕ УРАВНЕНИЯ (ИЛИ НЕРАВЕНСТВА) И ЕГО РЕШЕНИЕ (ДЛЯ УДОБСТВА ЕГО МОЖНО ПРИВЕСТИ К ПРИВЫЧНОМУ «МАТЕМАТИЧЕСКОМУ» ВИДУ). АНАЛИЗ ПОЛУЧЕННОГО ОТВЕТА.

Выразим искомую температуру из исходного уравнения.

$$\frac{l}{l_0} = 1 + \alpha \cdot t$$

$$\alpha \cdot t = \frac{l}{l_0} - 1 = \frac{l - l_0}{l_0}$$

$$t = \frac{l - l_0}{l_0 \cdot \alpha}$$

Для удобства вычислений выразим все длины в миллиметрах.

$$t = \frac{10006 - 10000}{10000 \cdot 1{,}2 \cdot 10^{-5}} = \frac{6 \cdot 10^5}{1{,}2 \cdot 10000} = \frac{60}{1{,}2} = \frac{600}{12} = \frac{300}{6} = 50$$

2-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПРАВИЛЬНОСТЬ ВСЕХ ПРЕДЫДУЩИХ ДЕЙСТВИЙ.

В данном случае проверка может выглядеть так:

$l(t°) = l_0(1 + \alpha \cdot t°) = 10000(1 + 1{,}2 \cdot 10^{-5} \cdot 50) = 10000(1 + 0{,}0006) = 10006$ (мм).

Именно такой и должна быть длина рельса в результате расширения. Значит ответ правильный.

3-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ В ВИДЕ ДЕСЯТИЧНОГО ЧИСЛА.

5	*0*						

B12.10. ПОСЛЕ ДОЖДЯ УРОВЕНЬ ВОДЫ В КОЛОДЦЕ МОЖЕТ ПОВЫСИТЬСЯ. МАЛЬЧИК ИЗМЕРЯЕТ ВРЕМЯ ПАДЕНИЯ t НЕБОЛЬШИХ КАМЕШКОВ В КОЛОДЕЦ И РАССЧИТЫВАЕТ РАССТОЯНИЕ ОТ ПОВЕРХНОСТИ ЗЕМЛИ ДО УРОВНЯ ВОДЫ ПО ФОРМУЛЕ $h = -5t^2$.
ДО ДОЖДЯ ВРЕМЯ ПАДЕНИЯ КАМЕШКОВ СОСТАВЛЯЛО 1 С.
НА КАКУЮ НАИМЕНЬШУЮ ВЫСОТУ ДОЛЖЕН ПОДНЯТЬСЯ УРОВЕНЬ ВОДЫ ПОСЛЕ ДОЖДЯ, ЧТОБЫ ИЗМЕРЯЕМОЕ ВРЕМЯ ИЗМЕНИЛОСЬ БОЛЬШЕ, ЧЕМ НА 0,1 С? (ОТВЕТ ВЫРАЗИТЕ В МЕТРАХ).

1-Й ЭТАП: АНАЛИЗ УСЛОВИЯ ЗАДАЧИ, СОСТАВЛЕНИЕ УРАВНЕНИЯ (ИЛИ НЕРАВЕНСТВА) И ЕГО РЕШЕНИЕ (ДЛЯ УДОБСТВА ЕГО МОЖНО ПРИВЕСТИ К ПРИВЫЧНОМУ «МАТЕМАТИЧЕСКОМУ» ВИДУ). АНАЛИЗ ПОЛУЧЕННОГО ОТВЕТА.

Уровень воды до дождя был $h_1 = -5 \cdot 1^2 = -5$ (рис. 10.10).
Поскольку уровень воды повысится, измеряемое время уменьшится как минимум на $0{,}1$ с, и станет равным $0{,}9$ с.

Тогда уровень воды будет

$h_2 = -5 \cdot 0{,}9^2 = -5 \cdot 0{,}81 = -4{,}05.$

Таким образом, наименьшая высота уровня воды должна стать $-4{,}05$. И эту цифру нужно записать в ответ.

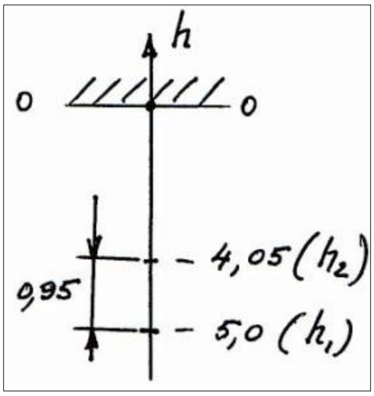


Рисунок 12.10

Но не тут-то было!
Правильным ответом считается число 0,95
(так решили составители задачи!).

Это число действительно можно получить: $h_2 - h_1 = -4{,}05 - (-5{,}0) = 0{,}95$.
Именно таков подъем уровня воды относительно первоначального уровня.
Но ведь вопрос задачи можно понять и по-другому: «на какую наименьшую высоту должен подняться уровень воды относительно земли»?
И тогда ответ получается $-4{,}05$, что в результате окажется неправильным.
Но этот момент в условии не разъяснен!

Эта ситуация является примером двусмысленных задач, которые по идее не должны предлагаться на ЕГЭ вообще.

Подобные задачи служат поводом для обоснованных вопросов и скандалов. И это правильно!

2-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПРАВИЛЬНОСТЬ ВСЕХ ПРЕДЫДУЩИХ ДЕЙСТВИЙ.

3-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ В ВИДЕ ДЕСЯТИЧНОГО ЧИСЛА.

0	*,*	*9*	5				

А теперь, после рассмотрения этих, довольно разных примеров, можно сходить в «Открытый банк заданий по математике», где находится большое количество других, еще более разных и ужасно занимательных «практико – ориентированных» заданий В12 ☺.

ЕГЭ-2012: ЗАДАНИЕ B13

ОБЩИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

Успешность выполнение некоторых заданий решающим образом зависит от выбранного способа этого самого выполнения. Для решения большинства заданий существуют и используются как простые и очевидные способы (а значит хорошие), так и сложные, плохо понятные и «мутные» (а значит плохие).

Эти различия между хорошими и плохими способами как нельзя лучше проявляются при решении текстовых задач. Именно в них «техника решения» играет определяющую роль.

В учебной литературе упоминаются самые разнообразные примеры таких «техник». Часто они не наглядны, достаточно сложны в запоминании и производят впечатление чего-то искусственного. Например, так нелюбимый многими подход через длинные многоходовые рассуждения: «Пусть х – это … , тогда …».
Иногда такое решение-рассуждение может занимать в книге до четверти печатной страницы! Оно требует много времени для того, чтобы разобраться с ним, но даже при многократном прочтении (несмотря на то, что все вроде бы правильно) все же остается ощущение какого-то жульничества. Наверное, такая ситуация знакома и вам?

Или другой популярный совет: составлять для каждого типа задач специальные таблицы, в которых все содержание задачи разносится по разным ячейкам. А после этого, поглядев на таблицу, рекомендуется каким-то загадочным образом вдруг взять, и решить задачу!

Подобные советы обычно имеют весьма и весьма ограниченную пользу. Научиться решать такими неочевидными и мудреными способами получается, как правило, только у «математически продвинутых» учащихся. У меня, например, так и не получилось ☺.

Предлагаемый ниже Подход к решению текстовых задач сводится к двум основным моментам:

1) По условию любой задачи нужно обязательно (!) составлять рисунок.
   Именно так – как в 5-м классе! На него в схематичном виде наносится вся существенная информация. Достоинство рисунка – возможность одним взглядом охватить все содержание задачи и понять его, причем после его составления печатный текст условия для решения уже не нужен;

2) Рисунок позволяет выявить некий важный, ключевой факт (идею) решаемой задачи.
   По поводу этого факта заранее известно следующее:

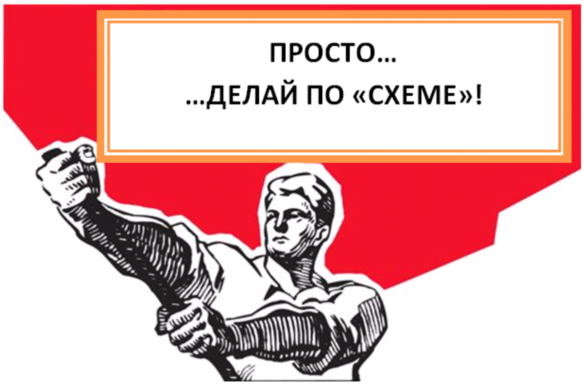
- ✓ Он обязательно содержится в условии;
- ✓ Он очень простой;
- ✓ Он может быть выражен «просто словами», без каких-либо формул;

- ✓ Именно этот факт «порождает» уравнение, которое, в свою очередь, приводит к ответу (либо помогает вычислить искомое отношение).

Таким образом, рисунок дает быстрое понимание сути задачи, а найденный факт (идея) приводит к собственно решению.

Все сказанное будет проиллюстрировано конкретными примерами решения достаточно разноплановых задач.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАНИЙ B13



B13.1. ОТ ПРИСТАНИ А К ПРИСТАНИ В, РАССТОЯНИЕ МЕЖДУ КОТОРЫМИ РАВНО 420 КМ, ОТПРАВИЛСЯ С ПОСТОЯННОЙ СКОРОСТЬЮ ПЕРВЫЙ ТЕПЛОХОД, А ЧЕРЕЗ 1 ЧАС ПОСЛЕ ЭТОГО СЛЕДОМ ЗА НИМ СО СКОРОСТЬЮ НА 1 КМ/Ч БОЛЬШЕЙ ОТПРАВИЛСЯ ВТОРОЙ. НАЙДИТЕ СКОРОСТЬ ПЕРВОГО ТЕПЛОХОДА, ЕСЛИ В ПУНКТ В ОБА ТЕПЛОХОДА ПРИБЫЛИ ОДНОВРЕМЕННО. ОТВЕТ ДАЙТЕ В КМ/Ч.

1-Й ЭТАП: ОТОБРАЗИТЬ УСЛОВИЕ ЗАДАЧИ С ПОМОЩЬЮ РИСУНКА (РИС. 13.1).

2-Й ЭТАП: НАЙТИ ПРОСТОЙ, СОДЕРЖАЩИЙСЯ В УСЛОВИИ ЗАДАЧИ ФАКТ (ИДЕЮ).

В этой задаче таким фактом удобно считать то, что время движения второго теплохода на 1 час меньше, чем первого, то есть $t_2 = t_1 - 1$.

3-Й ЭТАП: ЗАПИСАТЬ ВЫБРАННЫЙ ФАКТ В ВИДЕ БОЛЕЕ ПОДРОБНОГО УРАВНЕНИЯ, ИСПОЛЬЗУЯ ОБОЗНАЧЕНИЯ ИЗ РИСУНКА.

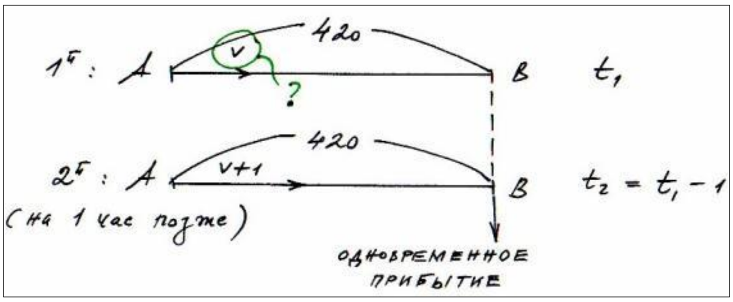


Рисунок 13.1

$$t_2 = t_1 - 1$$

$$\frac{420}{v+1} = \frac{420}{v} - 1$$

Привычнее всего решать уравнения, в которых неизвестная величина обозначена как x.
Поэтому «на время решения уравнения» заменим v на x:

$$\frac{420}{x+1} = \frac{420}{x} - 1$$

$$\frac{420}{x+1} - \frac{420}{x} + 1 = 0$$

Приведем все слагаемые уравнения к общему знаменателю:

$$\frac{420x - 420(x+1) + x(x+1)}{x(x+1)} = 0$$

Найдем x, приравняв числитель к нулю:

$$420x - 420x - 420 + x^2 + x = 0$$

$$x^2 + x - 420 = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4(-420)}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1681}}{2}$$

Существует мнение, что нужно помнить таблицу квадратов чисел. Я считаю, что специально этого делать не нужно.
Что запомнилось само, того и достаточно (например, $25^2 = 625, 11^2 = 121$ и так далее).

В случае же необходимости, всегда можно извлечь корень из встретившегося в задаче числа несложным подбором. Примеры этого приведены в нескольких задачах.

Итак, найдем подбором число, квадрат которого равен 1681. Понятно, что это число находится между 40 и 50 ($40^2 = 1600, 50^2 = 2500$). Поскольку 1681 оканчивается на 1, то искомое число должно оканчиваться на 1 ($1 \cdot 1 = \mathbf{1}$, $9 \cdot 9 = 8\mathbf{1}$).
Скорее всего $\sqrt{1681} = 41$, что и подтверждается проверкой ($41 \cdot 41 = 1681$).

Таким образом, скорость первого теплохода равна

$$x = v = \frac{-1 \pm 41}{2}$$

$$x = v = 20(\text{км/ч}).$$

Из двух корней, естественно, нужно выбрать положительный.

4-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПРАВИЛЬНОСТЬ СОСТАВЛЕННИЯ УРАВНЕНИЯ И ВЫЧИСЛЕНИЯ ЕГО КОРНЯ.

$$\frac{420}{20+1} = \frac{420}{20} - 1$$

$$20 = 21 - 1$$

Уравнение решено правильно.

5-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ В ВИДЕ ДЕСЯТИЧНОГО ЧИСЛА.

2	***0***						

B13.2. ДВА ВЕЛОСИПЕДИСТА ОДНОВРЕМЕННО ОТПРАВЛЯЮТСЯ В 168-КИЛОМЕТРОВЫЙ ПРОБЕГ. ПЕРВЫЙ ЕДЕТ СО СКОРОСТЬЮ, НА 2 КМ/Ч БОЛЬШЕЙ, ЧЕМ ВТОРОЙ, И ПРИБЫВАЕТ К ФИНИШУ НА 2 ЧАСА РАНЬШЕ ВТОРОГО. НАЙТИ СКОРОСТЬ ВЕЛОСИПЕДИСТА, ПРИШЕДШЕГО К ФИНИШУ ВТОРЫМ. ОТВЕТ ДАЙТЕ В КМ/Ч.

1-Й ЭТАП: ОТОБРАЗИТЬ УСЛОВИЕ ЗАДАЧИ С ПОМОЩЬЮ РИСУНКА (РИС. 13.2).

2-Й ЭТАП: НАЙТИ ПРОСТОЙ, СОДЕРЖАЩИЙСЯ В УСЛОВИИ ЗАДАЧИ ФАКТ (ИДЕЮ).

Как и в предыдущей задаче, удобно в качестве идеи для последующего уравнения выбрать заданную в условии разницу времени движения велосипедистов: $t_1 = t_2 - 2$.

3-Й ЭТАП: ЗАПИСАТЬ ВЫБРАННЫЙ ФАКТ В ВИДЕ БОЛЕЕ ПОДРОБНОГО УРАВНЕНИЯ, ИСПОЛЬЗУЯ ОБОЗНАЧЕНИЯ ИЗ РИСУНКА.

$t_1 = t_2 - 2$

$$\frac{168}{v+2} = \frac{168}{v} - 2$$

Заменим v на x:

$$\frac{168}{x+2} = \frac{168}{x} - 2$$

$$\frac{168}{x+2} - \frac{168}{x} + 2 = 0$$

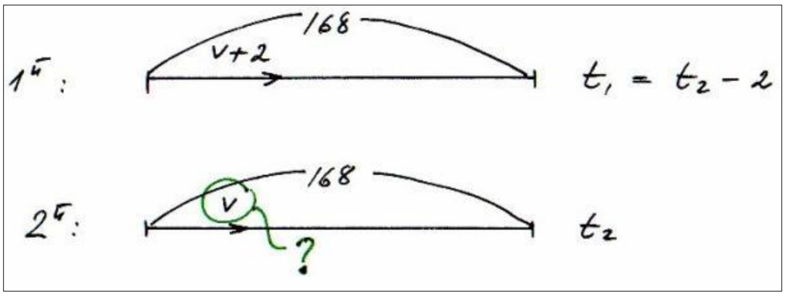


Рисунок 13.2

Приведем все слагаемые уравнения к общему знаменателю, после чего приравняем числитель дроби к нулю.

$$\frac{168x - 168(x+2) + 2x(x+2)}{x(x+2)} = 0$$

$$168x - 168x - 336 + 2x^2 + 4x = 0$$

$$2x^2 + 4x - 336 = 0$$

Для упрощения вычисления корней уменьшим входящие в уравнение коэффициенты в 2 раза.

$$x^2 + 2x - 168 = 0$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4(-168)}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{676}}{2} = \frac{-2 \pm 26}{2}$$

По смыслу задачи корень уравнения должен быть положительным. Следовательно,

$$x = \frac{-2 + 26}{2} = 12$$

Таким образом, скорость второго велосипедиста равна $x = v = 12$ (км/ч).

4-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПРАВИЛЬНОСТЬ СОСТАВЛЕНИЯ УРАВНЕНИЯ И ВЫЧИСЛЕНИЯ ЕГО КОРНЯ.

$$\frac{168}{12+2} = \frac{168}{12} - 2$$

$$12 = 14 - 2$$

5-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ В ВИДЕ ДЕСЯТИЧНОГО ЧИСЛА.

1	***2***						

B13.3. ТЕПЛОХОД ПРОХОДИТ ПО ТЕЧЕНИЮ РЕКИ ДО ПУНКТА НАЗНАЧЕНИЯ 504 КМ И ПОСЛЕ СТОЯНКИ ВОЗВРАЩАЕТСЯ В ПУНКТ НАЗНАЧЕНИЯ. НАЙДИТЕ СКОРОСТЬ ТЕЧЕНИЯ, ЕСЛИ СКОРОСТЬ ТЕПЛОХОДА В НЕПОДВИЖНОЙ ВОДЕ РАВНА 23 КМ/Ч, СТОЯНКА ДЛИТСЯ 10 ЧАСОВ, А В ПУНКТ ОТПРАВЛЕНИЯ ТЕПЛОХОД ВОЗВРАЩАЕТСЯ ЧЕРЕЗ 56 ЧАСОВ ПОСЛЕ ОТПЛЫТИЯ ИЗ НЕГО. ОТВЕТ ДАЙТЕ В КМ/Ч.

1-Й ЭТАП: ОТОБРАЗИТЬ УСЛОВИЕ ЗАДАЧИ С ПОМОЩЬЮ РИСУНКА (РИС. 13.3).

2-Й ЭТАП: НАЙТИ ПРОСТОЙ, СОДЕРЖАЩИЙСЯ В УСЛОВИИ ЗАДАЧИ ФАКТ (ИДЕЮ).

В качестве такого факта удобно выбрать одно из 2-х очевидных и равноценных обстоятельств:

1) $t_{\text{общее}} = t_{\text{движения}} + 10;$
2) $t_{\text{движения}} = 46$

Естественно, что $t_{\text{движения}} = t_{\rightarrow} + t_{\leftarrow}$

3-Й ЭТАП: ЗАПИСАТЬ ВЫБРАННЫЙ ФАКТ В ВИДЕ БОЛЕЕ ПОДРОБНОГО УРАВНЕНИЯ, ИСПОЛЬЗУЯ ОБОЗНАЧЕНИЯ ИЗ РИСУНКА.

1-й вариант уравнения выглядит так:

$$t_{\text{общее}} = t_{\text{движения}} + 10$$

$$56 = \frac{504}{23+v} + \frac{504}{23-v} + 10$$

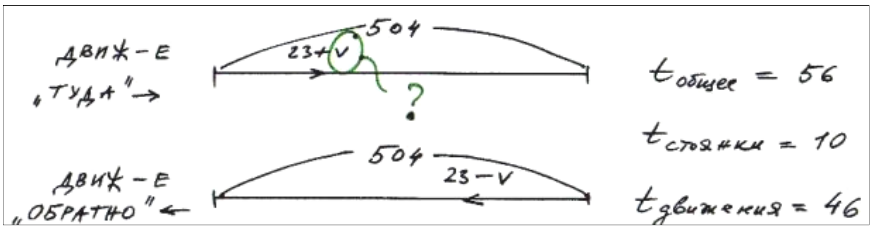


Рисунок 13.3

2-й вариант уравнения приводит, по сути, к тому же:

$$t_{\text{движения}} = 46$$

$$\frac{504}{23+v} + \frac{504}{23-v} = 46$$

Решим (как наиболее простое) последнее уравнение, заменив v на x:

$$\frac{504}{23+x} + \frac{504}{23-x} = 46$$

$$\frac{504}{23+x} + \frac{504}{23-x} - 46 = 0$$

$$\frac{504(23-x) + 504(23+x) - 46(23+x)(23-x)}{(23+x)(23-x)} = 0$$

$$504(23 - x + 23 + x) - 46(23^2 - x^2)$$

$$504 \cdot 46 - 46(529 - x^2)$$

$504 = 529 - x^2$

$x^2 = 25$

$x = \pm 5$

Выбираем положительный корень уравнения: $x = v = 5$ (км/ч).

4-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПРАВИЛЬНОСТЬ СОСТАВЛЕНИЯ УРАВНЕНИЯ И ВЫЧИСЛЕНИЯ ЕГО КОРНЯ.

$$\frac{504}{23+5} + \frac{504}{23-5} = 46$$

$$\frac{504}{28} + \frac{504}{18} = 46$$

$18 + 28 = 46$

$46 = 46$

5-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ В ВИДЕ ДЕСЯТИЧНОГО ЧИСЛА.

5							

B13.4. ПЕРВАЯ ТРУБА ПРОПУСКАЕТ НА 1 ЛИТР ВОДЫ В МИНУТУ МЕНЬШЕ, ЧЕМ ВТОРАЯ ТРУБА. СКОЛЬКО ЛИТРОВ ВОДЫ В МИНУТУ ПРОПУСКАЕТ ПЕРВАЯ ТРУБА, ЕСЛИ РЕЗЕРВУАР ОБЪЕМОМ 240 ЛИТРОВ ОНА ЗАПОЛНЯЕТ НА 2 МИНУТЫ ДОЛЬШЕ, ЧЕМ ВТОРАЯ ТРУБА ЗАПОЛНЯЕТ РЕЗЕРВУАР ОБЪЕМОМ 224 ЛИТРА?

1-Й ЭТАП: ОТОБРАЗИТЬ УСЛОВИЕ ЗАДАЧИ С ПОМОЩЬЮ РИСУНКА (РИС. 13.4).

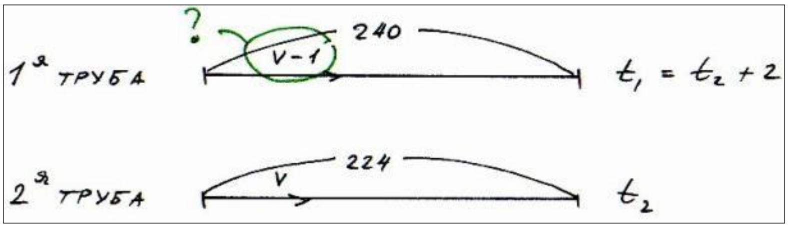


Рисунок 13.4

По аналогии с задачами на «обычное» движение, пропускную способность трубы можно рассматривать как скорость вытекания воды (л/мин), и обозначать как v. А объем воды (количество литров) будет чем-то напоминать пройденное расстояние (количество метров). Очень удобно, что при таком подходе вид рисунка останется тем же.

2-Й ЭТАП: НАЙТИ ПРОСТОЙ, СОДЕРЖАЩИЙСЯ В УСЛОВИИ ЗАДАЧИ ФАКТ (ИДЕЮ).

Время наполнения 1-го резервуара на 2 минуты больше, чем 2-го: $t_1 = t_2 + 2$.

3-Й ЭТАП: ЗАПИСАТЬ ВЫБРАННЫЙ ФАКТ В ВИДЕ БОЛЕЕ ПОДРОБНОГО УРАВНЕНИЯ, ИСПОЛЬЗУЯ ОБОЗНАЧЕНИЯ ИЗ РИСУНКА.

$$t_1 = t_2 + 2$$

$$\frac{240}{v-1} = \frac{224}{v} + 2$$

Заменим v на x:

$$\frac{240}{x-1} = \frac{224}{x} + 2$$

$$\frac{240}{x-1} - \frac{224}{x} - 2 = 0$$

$$\frac{240x - 224(x-1) - 2x(x-1)}{x(x-1)} = 0$$

$$240x - 224x + 224 - 2x^2 + 2x = 0$$

$$-2x^2 + 18x + 224 = 0$$

$$2x^2 - 18x - 224 = 0$$

$x^2 - 9x - 112 = 0$

$$x = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 4(-168)}}{2} = \frac{9 \pm \sqrt{529}}{2}$$

Значение $\sqrt{529}$ лежит между 20 и 30 ($20^2 = 400, 30^2 = 900$). Поскольку 529 оканчивается на 9, искомое число должно оканчиваться на 3 или 7 ($3 \cdot 3 = \mathbf{9}$, $7 \cdot 7 = 4\mathbf{9}$).
Проверкой убеждаемся, что $\sqrt{529} = 23$ $(23 \cdot 23 = 529)$.

По смыслу задачи выбираем положительный корень уравнения:

$x = v = \frac{9+23}{2} = \frac{32}{2} = 16$ (л/мин).

Поскольку необходимо найти скорость пропускания воды 1-й трубой, а она равна $v - 1$, то получим ответ $16 - 1 = 15$.

Как вариант, можно было бы уже на рисунке «скорость» 1-й трубы обозначить как v (тогда «скорость» 2-й трубы будет $v + 1$), и сразу находить именно ее.

4-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПРАВИЛЬНОСТЬ СОСТАВЛЕНИЯ УРАВНЕНИЯ И ВЫЧИСЛЕНИЯ ЕГО КОРНЯ.

$$\frac{240}{16 - 1} = \frac{224}{16} + 2$$

$16 = 14 + 2$

5-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ В ВИДЕ ДЕСЯТИЧНОГО ЧИСЛА.

1	***5***						

B13.5. ПЕРВЫЙ РАБОЧИЙ ЗА ЧАС ДЕЛАЕТ НА 2 ДЕТАЛИ БОЛЬШЕ, ЧЕМ ВТОРОЙ РАБОЧИЙ, И ЗАКАНЧИВАЕТ РАБОТУ НАД ЗАКАЗОМ, СОСТОЯЩИМ ИЗ 192 ДЕТАЛЕЙ, НА 4 ЧАСА РАНЬШЕ, ЧЕМ ВТОРОЙ РАБОЧИЙ ВЫПОЛНЯЕТ ЗАКАЗ, СОСТОЯЩИЙ ИЗ 224 ТАКИХ ЖЕ ДЕТАЛЕЙ. СКОЛЬКО ДЕТАЛЕЙ ДЕЛАЕТ В ЧАС ВТОРОЙ РАБОЧИЙ?

1-Й ЭТАП: ОТОБРАЗИТЬ УСЛОВИЕ ЗАДАЧИ С ПОМОЩЬЮ РИСУНКА (РИС. 13.5).

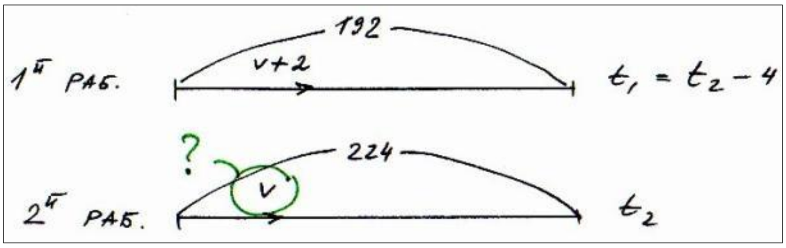


Рисунок 13.5

И опять, несмотря на то, что тема задачи не связана с движением, рисунок удобно выполнить «в стиле движения». Производительность работы в этом случае можно рассматривать и обозначать как некую скорость работы v (детали/час).
А количество деталей в заказе похоже на пройденный путь (количество километров).

2-Й ЭТАП: НАЙТИ ПРОСТОЙ, СОДЕРЖАЩИЙСЯ В УСЛОВИИ ЗАДАЧИ ФАКТ (ИДЕЮ).

И сново идею, порождающую уравнение, проще всего связать со временем: $t_1 = t_2 - 4.$

3-Й ЭТАП: ЗАПИСАТЬ ВЫБРАННЫЙ ФАКТ В ВИДЕ БОЛЕЕ ПОДРОБНОГО УРАВНЕНИЯ, ИСПОЛЬЗУЯ ОБОЗНАЧЕНИЯ ИЗ РИСУНКА.

$$t_1 = t_2 - 4$$

$$\frac{192}{v+2} = \frac{224}{v} - 4$$

Дальше следует знакомый (и такой одинаковый!) алгоритм.

$$\frac{192}{x+2} = \frac{224}{x} - 4$$

$$\frac{192}{x+2} - \frac{224}{x} + 4 = 0$$

$$\frac{(x+2) + 4x(x+2)}{x(x+2)} = 0$$

$$192x - 224x - 448 + 4x^2 + 8x = 0$$

$$4x^2 - 24x - 448 = 0$$

$$x^2 - 6x - 112 = 0$$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4(-112)}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{484}}{2} = \frac{6 \pm 22}{2}$$

$$x = \frac{6 + 22}{2} = 14$$

Таким образом, скорость работы 2-го рабочего равна $x = v = 14$ (деталей/час).

4-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПРАВИЛЬНОСТЬ СОСТАВЛЕНИЯ УРАВНЕНИЯ И ВЫЧИСЛЕНИЯ ЕГО КОРНЯ.

$$\frac{192}{14 + 2} = \frac{224}{14} - 4$$

$$12 = 16 - 4$$

5-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ В ВИДЕ ДЕСЯТИЧНОГО ЧИСЛА.

1	***4***						

B13.6. ИЗ А в В ОДНОВРЕМЕННО ВЫЕХАЛИ ДВА АВТОМОБИЛИСТА. ПЕРВЫЙ ПРОЕХАЛ С ПОСТОЯННОЙ СКОРОСТЬЮ ВЕСЬ ПУТЬ. ВТОРОЙ ПРОЕХАЛ ПЕРВУЮ ПОЛОВИНУ ПУТИ СО СКОРОСТЬЮ, МЕНЬШЕЙ СКОРОСТИ ПЕРВОГО НА 14 КМ/ЧАС, А ВТОРУЮ ПОЛОВИНУ ПУТИ ПРОЕХАЛ СО СКОРОСТЬЮ 84 КМ/ЧАС, В РЕЗУЛЬТАТЕ ЧЕГО ПРИБЫЛ В В ОДНОВРЕМЕННО С ПЕРВЫМ АВТОМОБИЛИСТОМ.
НАЙДИТЕ СКОРОСТЬ ПЕРВОГО АВТОМОБИЛИСТА, ЕСЛИ ИЗВЕСТНО, ЧТО ОНА БОЛЬШЕ 52 КМ/ЧАС. ОТВЕТ ДАЙТЕ В КМ/Ч.

1-Й ЭТАП: ОТОБРАЗИТЬ УСЛОВИЕ ЗАДАЧИ С ПОМОЩЬЮ РИСУНКА (РИС. 13.6).

На рисунке весь путь обозначен как S.
Как вариант, его можно принять равным 1 (обычно в математике так и делают).

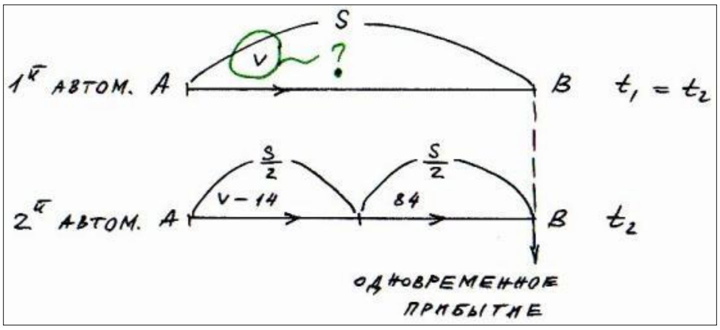


Рисунок 13.6

2-Й ЭТАП: НАЙТИ ПРОСТОЙ, СОДЕРЖАЩИЙСЯ В УСЛОВИИ ЗАДАЧИ ФАКТ (ИДЕЮ).

Время движения автомобилистов равно, то есть $t_1 = t_2$.

3-Й ЭТАП: ЗАПИСАТЬ ВЫБРАННЫЙ ФАКТ В ВИДЕ БОЛЕЕ ПОДРОБНОГО УРАВНЕНИЯ, ИСПОЛЬЗУЯ ОБОЗНАЧЕНИЯ ИЗ РИСУНКА.

$$t_1 = t_2$$

$$\frac{S}{v} = \frac{S}{2(v-14)} + \frac{S}{2\cdot 84}$$

Заменяя v на x и сокращая S, получим:

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{2(x-14)} + \frac{1}{2\cdot 84}$$

$$\frac{1}{2(x-14)} + \frac{1}{2\cdot 84} - \frac{1}{x} = 0$$

$$\frac{84x + x(x-14) - 168(x-14)}{168x(x-14)} = 0$$

$$84x + x^2 - 14x - 168 + 2352 = 0$$

$x^2-98x+2352=0$

Для облегчения решения уравнений с такими большими несокращаемыми коэффициентами (и обязательно четным 2-м коэффициентом) гораздо лучше пользоваться формулой

$$x=\frac{-\frac{b}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-ac}}{a},$$

которая получается из «обычной» формулы вычисления корней делением числителя и знаменателя на 2.

В нашем случае

$$x=\frac{49\pm\sqrt{49^2-2352}}{1}=49\pm\sqrt{49}=49\pm7$$

Выбираем корень, который больше 53 (см. условие задачи), то есть $x=49+7=56$.

Таким образом, скорость первого автомобилиста $x=v=56$ (км/ч).

4-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПРАВИЛЬНОСТЬ СОСТАВЛЕНИЯ УРАВНЕНИЯ И ВЫЧИСЛЕНИЯ ЕГО КОРНЯ.

$$\frac{1}{56}=\frac{1}{2(56-14)}+\frac{1}{168}$$

$$\frac{1}{56}=\frac{1}{84}+\frac{1}{168}=\frac{2}{168}+\frac{1}{168}=\frac{3}{168}=\frac{1}{56}$$

5-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ В ВИДЕ ДЕСЯТИЧНОГО ЧИСЛА.

5	***6***						

B13.7. ДВА ФЕРМЕРА, РАБОТАЯ ВМЕСТЕ, МОГУТ ВСПАХАТЬ ПОЛЕ ЗА 25 ЧАСОВ. ПРОИЗВОДИТЕЛЬНОСТИ ТРУДА ПЕРВОГО И ВТОРОГО ФЕРМЕРОВ ОТНОСЯТСЯ КАК 2:5. ФЕРМЕРЫ ПЛАНИРУЮТ РАБОТАТЬ ПООЧЕРЕДНО. СКОЛЬКО ВРЕМЕНИ ДОЛЖЕН ПРОРАБОТАТЬ ВТОРОЙ ФЕРМЕР, ЧТОБЫ ЭТО ПОЛЕ БЫЛО ВСПАХАНО ЗА 45,5 ЧАСОВ?

1-Й ЭТАП: ОТОБРАЗИТЬ УСЛОВИЕ ЗАДАЧИ С ПОМОЩЬЮ РИСУНКА (РИС. 13.7).

2-Й ЭТАП: НАЙТИ ПРОСТОЙ, СОДЕРЖАЩИЙСЯ В УСЛОВИИ ЗАДАЧИ ФАКТ (ИДЕЮ).

Очевидно, что объем работы в обоих случаях одинаков ($V_1 = V_2$), то есть

$v_{\text{совм}} \cdot t_{\text{общ}1} = v_1 t_1 + v_2 t_2$ или

$(v_1 + v_2) \cdot t_{\text{общ}1} = v_1(45{,}5 - t_2) + v_2 t_2$

3-Й ЭТАП: ЗАПИСАТЬ ВЫБРАННЫЙ ФАКТ В ВИДЕ БОЛЕЕ ПОДРОБНОГО УРАВНЕНИЯ, ИСПОЛЬЗУЯ ОБОЗНАЧЕНИЯ ИЗ РИСУНКА.

В данном случае уравнение получится такое:

$(2x + 5x) \cdot 25 = 2x(45{,}5 - t_2) + 5x \cdot t_2$

$7 \cdot 25 = 2(45{,}5 - t_2) + 5t_2$

$175 = 91 + 3t_2$

$t_2 = \frac{84}{3} = 28$

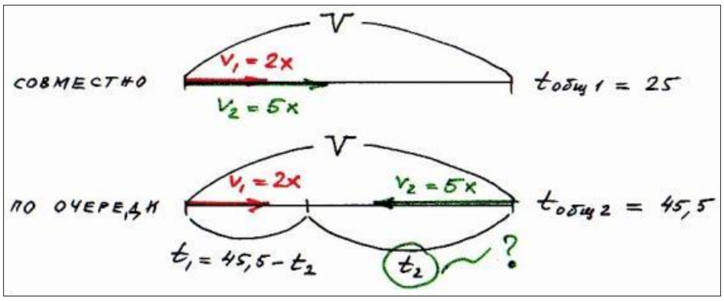


Рисунок 13.7

Таким образом, время работы 2-го фермера равно 28 ч.

4-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПРАВИЛЬНОСТЬ СОСТАВЛЕНИЯ УРАВНЕНИЯ И ВЫЧИСЛЕНИЯ ЕГО КОРНЯ.

Ввиду относительной сложности задачи, после проверки правильности найденного корня следует еще раз проверить все этапы ее решения.

$7 \cdot 25 = 2(45{,}5 - 28) + 5 \cdot 28$

$175 = 2 \cdot 17{,}5 + 5 \cdot 28$

$175 = 175$

5-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ В ВИДЕ ДЕСЯТИЧНОГО ЧИСЛА.

2	***8***						

B13.8. ДВА ПЛОТНИКА, РАБОТАЯ ВМЕСТЕ, МОГУТ ВЫПОЛНИТЬ ЗАДАНИЕ ЗА 36 ЧАСОВ. ПРОИЗВОДИТЕЛЬНОСТЬ ТРУДА ПЕРВОГО И ВТОРОГО ПЛОТНИКОВ ОТНОСЯТСЯ КАК 3:4. ПЛОТНИКИ ДОГОВОРИЛИСЬ РАБОТАТЬ ПООЧЕРЕДНО. КАКУЮ ЧАСТЬ ЭТОГО ЗАДАНИЯ ДОЛЖЕН ВЫПОЛНИТЬ ВТОРОЙ ПЛОТНИК, ЧТОБЫ ВСЕ ЗАДАНИЕ БЫЛО ВЫПОЛНЕНО ЗА 69,3 Ч?

1-Й ЭТАП: ОТОБРАЗИТЬ УСЛОВИЕ ЗАДАЧИ С ПОМОЩЬЮ РИСУНКА (РИС. 13.8).

2-Й ЭТАП: НАЙТИ ПРОСТОЙ, СОДЕРЖАЩИЙСЯ В УСЛОВИИ ЗАДАЧИ ФАКТ (ИДЕЮ).

Объем работы в обоих случаях одинаков ($V_1 = V_2$), то есть

$v_{\text{совм}} \cdot t_{\text{общ}1} = v_1 t_1 + v_2 t_2$ или

$(v_1 + v_2) \cdot t_{\text{общ}1} = v_1(69{,}3 - t_2) + v_2 t_2$

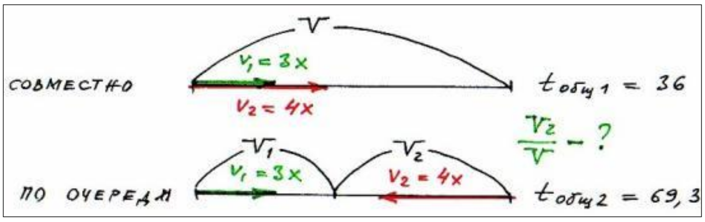


Рисунок 13.8

3-Й ЭТАП: ЗАПИСАТЬ ВЫБРАННЫЙ ФАКТ В ВИДЕ БОЛЕЕ ПОДРОБНОГО УРАВНЕНИЯ, ИСПОЛЬЗУЯ ОБОЗНАЧЕНИЯ ИЗ РИСУНКА.

$(3x + 4x) \cdot 36 = 3x(69{,}3 - t_2) + 4x \cdot t_2$

$7 \cdot 36 = 3(69{,}3 - t_2) + 4t_2 \qquad (*)$

В задаче требуется найти для варианта «по очереди» отношение

$$\frac{V_2}{V} = \frac{V_2}{V_1 + V_2} = \frac{v_2 t_2}{v_1(69{,}3 - t_2) + v_2 t_2}$$

Чтобы найти это отношение, подставим в него t_2, предварительно выразив его из уравнения $(*)$:

$252 = 207{,}9 + t_2; \qquad t_2 = 44{,}1.$

Итак,

$$\frac{V_2}{V} = \frac{4x \cdot 44{,}1}{3x(69{,}3 - 44{,}1) + 4x \cdot 44{,}1} = \frac{176{,}4}{75{,}6 + 176{,}4} = 0{,}7$$

4-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПРАВИЛЬНОСТЬ СОСТАВЛЕНИЯ УРАВНЕНИЯ И ВЫЧИСЛЕНИЯ ЕГО КОРНЯ.

Ввиду относительной сложности задачи, после проверки правильности найденного корня следует еще раз проверить все этапы ее решения.

5-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ В ВИДЕ ДЕСЯТИЧНОГО ЧИСЛА.

0	*,*	*7*					

Выше были рассмотрены текстовые задачи на довольно разные темы.
Все эти задачи имели похожий подход к решению. А именно – они решались по аналогии с задачами на движение (и даже рисунок к ним был стилизован «под движение»).
И такой подход действительно применим к очень широкому спектру задач.

Вместе с тем, для большого количества других задач приходится делать рисунки, которые сложно «притянуть» к движению. Правила составления таких рисунков сложно формализовать, то есть представить в виде четких, готовых рецептов.

Поэтому общие пожелания к ним можно сформулировать так: рисунки должны быть достаточно простыми и интуитивно понятными, выполняться в «свободном стиле» и содержать всю информацию из условия задачи.

Рассмотрим несколько примеров таких задач.

B13.9. ОБЪЕМЫ ЕЖЕГОДНОЙ ДОБЫЧИ НЕФТИ ПЕРВОЙ, ВТОРОЙ И ТРЕТЬЕЙ СКВАЖИНАМИ ОТНОСЯТСЯ КАК 7:6:5. ПЛАНИРУЕТСЯ УМЕНЬШИТЬ ГОДОВУЮ ДОБЫЧУ НЕФТИ ИЗ ПЕРВОЙ СКВАЖИНЫ НА 4%, А ИЗ ВТОРОЙ – НА 2%. НА СКОЛЬКО ПРОЦЕНТОВ НУЖНО УВЕЛИЧИТЬ ГОДОВУЮ ДОБЫЧУ НЕФТИ ИЗ ТРЕТЬЕЙ СКВАЖИНЫ, ЧТОБЫ СУММАРНЫЙ ОБЪЕМ ДОБЫВАЕМОЙ ЗА ГОД НЕФТИ НЕ ИЗМЕНИЛСЯ?

1-Й ЭТАП: ОТОБРАЗИТЬ УСЛОВИЕ ЗАДАЧИ С ПОМОЩЬЮ РИСУНКА (РИС. 13.9).

А вот условие таких задач, пожалуй, удобнее отображать с помощью таблицы.
Через "k" обозначим повышение добычи нефти, выраженное в единицах.

2-Й ЭТАП: НАЙТИ ПРОСТОЙ, СОДЕРЖАЩИЙСЯ В УСЛОВИИ ЗАДАЧИ ФАКТ (ИДЕЮ).

Из условия понятно, что объем добываемой нефти должен остаться прежним, то есть

$$V_{\text{сейчас}} = V_{\text{план}}$$

	СЕЙЧАС	ПЛАН
I	7x	0,96 · 7x
II	6x	0,98 · 6x
III	5x	k · 5x ?

Рисунок 13.9

3-Й ЭТАП: РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ, СЛЕДУЮЩЕЕ ИЗ ВЫБРАННОГО ФАКТА.

$V_{\text{сейчас}} = V_{\text{план}}$

$7x + 6x + 5x = 0{,}96 \cdot 7x + 0{,}98 \cdot 6x + k \cdot 5x$

$18x = x(0{,}96 \cdot 7 + 0{,}98 \cdot 6 + 5k) \qquad (*)$

$18 = 6{,}72 + 5{,}88 + 5k$

$18 = 12{,}6 + 5k$

$k = 1{,}08 = 108\%$

Таким образом, добычу нефти из третьей скважины нужно увеличить на 8%.

4-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПРАВИЛЬНОСТЬ СОСТАВЛЕНИЯ УРАВНЕНИЯ И ВЫЧИСЛЕНИЯ ЕГО КОРНЯ.

Подставим $k = 1{,}08$ в уравнение $(*)$:

$18 = 6{,}72 + 5{,}88 + 5 \cdot 1{,}08$

$18 = 6{,}72 + 5{,}88 + 5{,}4$

$18 = 18$

5-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ В ВИДЕ ДЕСЯТИЧНОГО ЧИСЛА.

8							

B13.10. ЦИСТЕРНА ЗАПОЛНЯЕТСЯ КЕРОСИНОМ ЗА 2 ЧАСА С ПОМОЩЬЮ ТРЕХ НАСОСОВ, РАБОТАЮЩИХ ВМЕСТЕ. ПРОИЗВОДИТЕЛЬНОСТИ НАСОСОВ ОТНОСЯТСЯ КАК 1:2:7. СКОЛЬКО ПРОЦЕНТОВ ОБЪЕМА ЦИСТЕРНЫ БУДЕТ ЗАПОЛНЕНО ЗА 1 ЧАС 12 МИНУТ СОВМЕСТНОЙ РАБОТЫ ПЕРВОГО И ВТОРОГО НАСОСОВ?

1-Й ЭТАП: ОТОБРАЗИТЬ УСЛОВИЕ ЗАДАЧИ С ПОМОЩЬЮ РИСУНКА (РИС. 13.10А ИЛИ 13.10Б).

На самом деле все рисунки, приводимые к текстовым задачам, не являются образцами для буквального подражания.
По сути, они всего лишь отражают мои привычки рисования и представления о простоте рисунка.

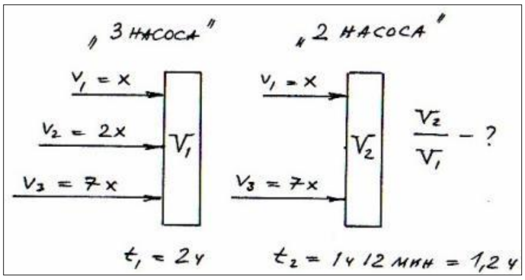


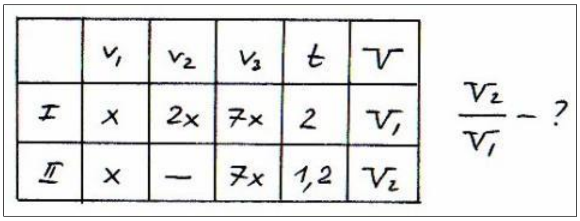
Рисунок 13.10а

Кому-то они понравятся (и помогут), а кому-то нет, и тогда нужно придумать что-то свое.
И это совершенно нормально, потому что существуют самые различные варианты «графического конспектирования» информации.

В качестве иллюстрации таких различий к этой задаче приведены два варианта рисунка, которые являются своеобразными «слепками» двух разных привычек рисования.

2-Й ЭТАП: НАЙТИ ПРОСТОЙ, СОДЕРЖАЩИЙСЯ В УСЛОВИИ ЗАДАЧИ ФАКТ (ИДЕЮ).

А в этой задаче никакой особой идеи искать и не нужно – можно сразу приступать к вычислениям отношения $\frac{V_2}{V_1}$.



	v_1	v_2	v_3	t	V
I	x	$2x$	$7x$	2	V_1
II	x	—	$7x$	$1{,}2$	V_2

Рисунок 13.10б

3-Й ЭТАП: РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ, СЛЕДУЮЩЕЕ ИЗ ВЫБРАННОГО ФАКТА.

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{(v_1 + v_3)t_2}{(v_1 + v_2 + v_3)t_1} = \frac{1{,}2(x + 7x)}{2(x + 2x + 7x)} = \frac{9{,}6}{20} = \frac{96}{200} = \frac{48}{100} = 48\%$$

4-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПРАВИЛЬНОСТЬ СОСТАВЛЕНИЯ УРАВНЕНИЯ И ВЫЧИСЛЕНИЯ ЕГО КОРНЯ.

Уместно будет для проверки правильности еще раз «пройтись» по всей задаче.

5-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ В ВИДЕ ДЕСЯТИЧНОГО ЧИСЛА.

4	*8*						

B13.11. ЗА ПЕРВЫЙ ГОД ПРЕДПРИЯТИЕ УВЕЛИЧИЛО ВЫПУСК ПРОДУКЦИИ НА 8%. В СЛЕДУЮЩЕМ ГОДУ ОН УВЕЛИЧИЛСЯ НА 25%. НА СКОЛЬКО ПРОЦЕНТОВ ВЫРОС ВЫПУСК ПРОДУКЦИИ ПО СРАВНЕНИЮ С ПЕРВОНАЧАЛЬНЫМ?

1-Й ЭТАП: ОТОБРАЗИТЬ УСЛОВИЕ ЗАДАЧИ С ПОМОЩЬЮ РИСУНКА (РИС. 13.11).

И снова условие задачи можно наглядно отобразить, используя всего лишь прямую линию.

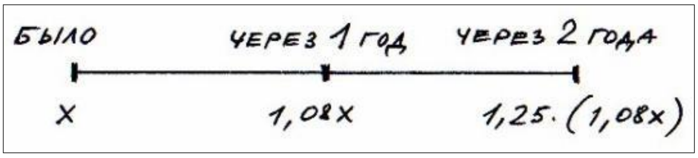


Рисунок 13.11

2-Й ЭТАП: НАЙТИ ПРОСТОЙ, СОДЕРЖАЩИЙСЯ В УСЛОВИИ ЗАДАЧИ ФАКТ (ИДЕЮ).

Несложно посчитать, что через 2 года объем продукции равен

$1{,}25 \cdot 1{,}08x = 1{,}35x$

Коэффициент $1{,}35x$ означает, что произошло увеличение на 35%.

3-Й ЭТАП: РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ, СЛЕДУЮЩЕЕ ИЗ ВЫБРАННОГО ФАКТА.

Вероятно, лучшей проверкой ответа будет повторное решение задачи.

4-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ В ВИДЕ ДЕСЯТИЧНОГО ЧИСЛА.

3	***5***						

В13.12. ВЛАЖНОСТЬ СУХОЙ ЦЕМЕНТНОЙ СМЕСИ НА СКЛАДЕ СОСТАВЛЯЕТ 18%. ВО ВРЕМЯ ПЕРЕВОЗКИ ИЗ-ЗА ДОЖДЕЙ ВЛАЖНОСТЬ СМЕСИ ПОВЫСИЛАСЬ НА 2%. НАЙДИТЕ МАССУ ПРИВЕЗЕННОЙ СМЕСИ, ЕСЛИ СО СКЛАДА БЫЛО ОТПРАВЛЕНО 400 КГ.

1-Й ЭТАП: ОТОБРАЗИТЬ УСЛОВИЕ ЗАДАЧИ С ПОМОЩЬЮ РИСУНКА (РИС. 13.12).

2-Й ЭТАП: НАЙТИ ПРОСТОЙ, СОДЕРЖАЩИЙСЯ В УСЛОВИИ ЗАДАЧИ ФАКТ (ИДЕЮ).

Количество собственно сухой смеси в обоих случаях остается неизменным, то есть

$$(1-0{,}18)\cdot 400=(1-0{,}20)\cdot x$$

$$0{,}82\cdot 400=0{,}8x$$

$$x=\frac{0{,}82\cdot 400}{0{,}8}=\frac{8{,}2\cdot 400}{8}=8{,}2\cdot 50=410$$

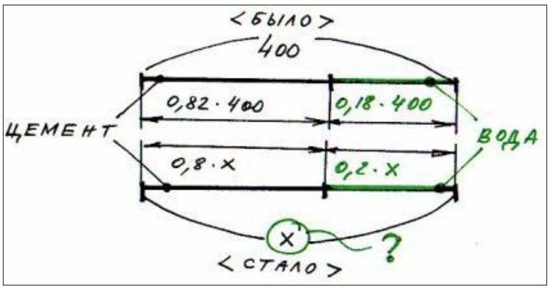


Рисунок 13.12

3-Й ЭТАП: РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ, СЛЕДУЮЩЕЕ ИЗ ВЫБРАННОГО ФАКТА.

Вероятно, лучшей проверкой ответа будет повторное решение задачи.

4-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ В ВИДЕ ДЕСЯТИЧНОГО ЧИСЛА.

4	*1*	*0*					

Мы рассмотрели наиболее простые типовые задания В13. На самом деле, существуют заметно более сложные текстовые задачи, но они явно не нужны категории «чайников», для которых написано это Пособие.

Впрочем, большинство из них решается по той же самой предложенной схеме!

Глава В13 получилась явно больше других, и это не случайно.
Ведь, по существующей статистике (информация взята из одной, не помню уже какой именно, брошюры по ЕГЭ) успешно справляются с текстовыми задачами около 10% выпускников.
Даже если эта цифра занижена, трудности с их решением, как показывает практика, действительно велики.

С пользой для дела вы можете «набить руку» на подобных задачах, время от времени посещая «Открытый банк заданий по математике».

УСПЕХОВ ВАМ В ЗАДАНИЯХ В13, А ТАКЖЕ В ЦЕЛОМ НА ЕГЭ-2012 ПО МАТЕМАТИКЕ!!!